Correction exercice I

a) A l'aide du théorème de Bézout, démontrons que : $\forall n \in Z$, $PGCD(2n + 1; 3n + 1) = 1$

Posons $x = 2n + 1$ et $y = 2n + 3$ avec $n \in Z$,

On a : $3x - 2y = 1$ **donc d'après le théorème de Bézout,** x **et** y **sont premiers entre eux.**

b) Démontrons que 137 est un nombre premier

En effet, $\sqrt{137} = 11,704$. 137 n'est divisible par aucun des nombres premiers 2, 3, 5, 7, 11 ; de plus $13^2 \succ 137$.

Donc 137 est un nombre premier

c) Pour décomposer 4872 en produit de facteurs premiers on utilise la décomposition pratique ci-dessous

4 872	2
2 436	2
1 218	2
609	3
203	7
29	29
1	

On obtient : $4872 = 2^3 \times 3 \times 7 \times 29$

d) Puisque 5 n'est pas un multiple de 3, alors l'équation : $6y - 3x = 5$ n'admet pas de solution. Par consequent $S = \{\}$

Puisque 3 est un multiple de 3, alors l'équation : $(6y - 3x = 3)$ admet des solutions .

$6y - 3x = 3 \Rightarrow 2x - x = 1 \Leftrightarrow x = 2y - 1 \Rightarrow x \equiv -1\ [2]\ x = 2k - 1$

En remplaçant x par sa valeur dans l'équation : $2x - x = 1$, on a : $y = k$

$S = \{(2k - 1; k)\}$

e) En déduit de ce qui précède, les solutions dans Z^2, de l'équation :

$(6y - 3x - 4)\ (6y - 3x + 4) = 1$

Résoudre l'équation $(6y - 3x - 4)\ (6y - 3x + 4) = 1$, revient à résoudre les systèmes suivants :

$\begin{cases} 6y - 3x - 4 = 1 \\ 6y - 3x + 4 = 1 \end{cases} \quad (S_1)$ ou $\begin{cases} 6y - 3x - 4 = -1 \\ 6y - 3x + 4 = -1 \end{cases} \quad (S_2)$

Soient $\begin{cases} 6y - 3x = 5 \\ 6y - 3x = -3 \end{cases} \quad (S_1)$ ou $\begin{cases} 6y - 3x = 3 \\ 6y - 3x = -5 \end{cases} \quad (S_2)$

D'après les questions précédents, 5 et – 5 ne sont pas des multiples de 3. Par conséquent aucun des deux systèmes n'admet de solution dansZ^2.

f) Décomposition en produit de facteurs

• $700 = 2^2 \times 5^2 \times 7$

• $18375 = 3 \times 3 \times 5^3 \times 7^2$

Donc

• $PPCM\ (700; 18375) = 2^2 \times 3 \times 5^3 \times 7^2 = 73500$

• $PGCD\ (700; 18375) = 5^2 \times 7 = 175$

Correction exercice II

1. Si $C_1 = 7$ et $C_2 = 4$, alors $2 \times 4 + (-1) \times 7 = 1$

Donc, pour mettre un litre d'eau dans la citerne, il suffit d'y mettre deux fois le contenu du seau de capacité C_2 et d'en ôter le contenu du seau de capacité C_1.

Si $C_1 = 6$ et $C_2 = 4$, alors C_1 et C_2 ne sont pas premiers entre eux. D'après le **théorème de Bézout** ou ne peut pas remplir la citerne avec deux seaux de capacités respectives C_1et C_2

2. D'après **Bézout,** le problème a une solution si et seulement si C_1 et C_2

Sont premiers entre eux.

Correction exercice III

Détermination des coefficients de Bézout

1) Démontrons, En utilisant l'algorithme d'Euclide, que 54 et 271 sont premiers entre eux.

• **On a :** $564 = 271 \times 2 + 22$ **;** $PGCD(564; 271) = PGCD(271, 22)$

• **On a :** $271 = 22 \times 12 + 7$ **;** $PGCD(271; 22) = PGCD(22, 7)$

• **On a :** $22 = 7 \times 2 + 1$ **;** $PGCD(22; 7) = PGCD(7, 1)$

Les nombres 564 et 271 sont premiers entre eux.

2) En déduisons deux entiers u et v tels que : $564u + 271v = 1$

Utilisons la division euclidienne précédente, de la dernière à la première

$1 = 22 + 7(-3) = 22 + (271 - 22 \times 12) \times (-3) = 271 \times (-3) + 22 \times 37 = 271 \times (-3) + (564 - 271 \times 2) \times 37$

$= 564 \times 37 + 271 \times (-77)$

On peut dont conclure que $(u; v) = (37; -77)$

Correction exercice IV

On se propose de résoudre dans Z^2 l'équation (E) : $34x - 15y = 2$

1. Résolvons dans Z^2 l'équation (E') : $34x - 15y = 0$;

Soit $(x; y)$ une solution de (E'). on a : $34x = 15y$

15 divise $34x$ et est premier avec 34 ; donc, d'après le théorème de Gauss, 15 divise x.

Il existe un entier relatif k tel que $x = 15k$.

On en déduit que : $y = 34k$

Réciproquement, pour tout entier relatif k, le couple $(15k; 34k)$ est solution de (E').

L'ensemble des solutions de (E') est donc : { $(15k; 34k, k \in Z\}$

2. On remarque que: 4x34=136 et 9x15=135 ; donc:34x8-15x18=2.

$$\begin{cases} 4 \times 34 = 136 \\ 9 \times 15 = 135 \end{cases} \Rightarrow 34 \times 8 - 15 \times 18 = 2$$

On peut prendre : $(x_0; y_0) = (8; 18)$

3. Soit $(x; y)$ un couple d'entiers relatifs.

On a : $34x - 15y = 0 \Leftrightarrow 34(x - x_0) - 15(y - y_0) = 2$.

On en déduit que les solutions de (E) sont les couples $(x - x_0; y - y_0)$ où $(x; y)$ est solution de (E').

L'ensemble des solutions de (E) est donc : { $(15k + 8; 34k + 18, k \in Z\}$

Correction exercice V

Soit x une solution de (S_1), il existe deux entiers relatifs p et q tels que : $\begin{cases} x = 34p - 1 \\ x = 15q + 1 \end{cases}$

On en déduit que : $34p - 15q = 2$

D'après l'étude de l'exercice 3, il existe un entier relatif k tel que : $(p; q) = (15k + 8; 34k + 18)$

Réciproquement, soit k un entier relatif.

Posons : $x = 34\,(15k + 8) - 1$

On a : $\begin{cases} x \equiv -1\,[34] \\ x \equiv +1\,[15] \end{cases}$

L'ensemble des solutions de (S_1) est donc : {$510k + 271, k \in Z$}

A noter qu'on obtient le même résultat en posant : $x = 15\,(34k + 18) + 1$

2. $\begin{cases} PGCD\,(x; y) = 12 \\ x + -y = 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 12x' \\ y = 12y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} PGCD\,(x'; y') = 1 \\ x' + y' = 5 \end{cases}$

On obtient : $\begin{cases} x' = 1 \\ y' = 4 \end{cases}, \begin{cases} x' = 2 \\ y' = 3 \end{cases}, \begin{cases} x' = 3 \\ y' = 2 \end{cases}, \begin{cases} x' = 4 \\ y' = 1 \end{cases}$

L'ensemble des solutions de (S_2) est donc : {(12 ; 48) ; (24 : 36) ; (36 ; 24) ; (48 ; 12)}.

Correction Exercice VI

Soit p un nombre premier.

1) a) Démontrons que pour tout entier i strictement compris entre 0 et p, C_p^i est multiple de p.

on a : $C_p^i = \frac{p!}{i!(p-i)!} = \frac{p}{i} \times \frac{(p-1)!}{(i-1)!(p-i)!} = \frac{p}{i} \times C_{p-1}^{i-1}$ soit $iC_p^i = pC_{p-1}^{i-1}$

ainsi p divise iC_p^i e est premier avec i; donc C_p^i est multiple de p.

b) En déduire que pour tous entiers relatifs a et b, on a : $(a + b)^p \equiv a^p + b^p\,[p]$

on a $(a + b)^p = a^p + (\sum_{i=1}^{p-1} C_p^i a^i b^{p-i}) + b^p$.

Or $\sum_{i=1}^{p-1} C_p^i a^i b^{p-i} \equiv 0\,[p]$ donc

$(a + b)^p \equiv a^p + b^p\,[p]$

2. a) Demontrons que $\forall a \in N\}$, $a^p \equiv a\,[p]$.

Pour tout entier naturel a, considérons la proposition $P(a)$: $a^p \equiv a\,[p]$

P(0) est vraie

Soit k un entier naturel

Si $P(k)$ est vraie, on a $k^p \equiv k\,[p]$ or, d'après la question précédente, on a $(k + 1)^p \equiv k^p + 1^p\,[p]$

Donc $(k + 1)^p \equiv (k - 1)\,[p]$ c'est-à-dire que $P(k + 1)$ est vraie

On en déduire que $P(a)$ est vraie pour tout entier a

b) En déduire que pour tout entier naturel a premier avec p, on a : $a^{p-1} \equiv 1\,[p]$

soit a un entier naturel premier avec p.

on a : $a \times a^{p-1} \equiv a \times 1\,[p]$; donc $a^{p-1} \equiv 1\,[p]$

Correction exercice VIII

Trouvons dans le système décimal un entier ? =???? divisible par 45 et tels que le couple (b; c) soit solution de l'équation : $x^2 - y^2 = 24$

(b, c) est solution si et seulement si $b^2 - c^2 = 24 \Rightarrow (b+c)(b-c) = 24 \times 1 = 2 \times 12 = 3 \times 8 = 4 \times 6$

Cas 1) $\begin{cases} b+c = 24 \\ b-c = 1 \end{cases} \Rightarrow 2b = 25$ **a rejeter**

Cas 2) $\begin{cases} b+c = 8 \\ b-c = 31 \end{cases} \Rightarrow 2b = 11$

Cas 3) $\begin{cases} b+c = 12 \\ b-c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 7 \\ c = 5 \end{cases}$ **alors** $(b, c) = (7, 5)$

Cas 3) $\begin{cases} b+c = 6 \\ b-c = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$ **alors** $(b, c) = (5, 1)$

Pour $(b, c) = (7, 5)$ on a $N = a75d$ et $(b, c) = (5, 1)$, on a $N = a51d$.

N est divisible par 45 si et seulement s''il est divisible à la fois par 9 et 5

$N \equiv 0\,[5]$ si et seulement si $d = \{0; 5\}$

Pour $y = 0$ on a $\begin{cases} a750 \equiv 0\,[9] \\ a510 \equiv 0\,[9] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 12 \equiv 0\,[9] \\ a + 6 \equiv 0\,[9] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 3 \equiv 0\,[9] \\ a + 6 \equiv 0\,[9] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \equiv -3\,[9] \\ a \equiv -6\,[9] \end{cases}$

$\begin{cases} a \equiv 6\,[9] \\ a \equiv 3\,[9] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6 + 9k \\ a = 3 + 9k \end{cases}$

Pour $y = 5$**, vous trouverez, pour** $k = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N = 1755 \\ N = 7515 \end{cases}$

Correction exercice VIII

Déterminons le nombre minimal d'arbres que l'on pourra planter si l'on veut que la ???????? entre deux arbres puisse être exprimée par un nombre entier de mètre

Pour cela déterminons-le PGCD(132; 156; 204)

- $132 = 2^2 \times 3 \times 11$
- $156 = 2^2 \times 3 \times 13$
- $204 = 2^2 \times 3 \times 17$

$PGCD(132; 156; 204) = 2^2 \times 3 = 12$

Sur chaque côté il y'a 12m entre les arbres deux à deux

Sur le côté de 132m le nombre d'arbre est : $N_1 = \frac{132}{12} = 11$ **arbres**

Sur le côté de 156m le nombre d'arbre est : $N_2 = \frac{156}{12} = 13$ **arbres**

Sur le côté de 204m le nombre d'arbre est : $N_3 = \frac{204}{12} = 17$ **arbres**

D'où le minimum d'arbres que l'on peut planter est de 41.

Correction exercice IX

Feux rouges : 18 secondes

Feux verts : 45 secondes

Feux blancs : 2min30sec = 2 × 60 + 30 = 150 secondes

Trouvons les instants d'émissions simultanés de feux :

a) Rouge et vert

$PPCM(18; 45) = 9PPCM(2; 5) = 9(10) = 90$ **alors** $I_E = 90k$ **????** $k \in N^*$

b) Rouge et blanc

$PPCM(18; 150) = 3PPCM(6; 50) = 3(150) = 450$ **alors** $I_E = 450k$ **????** N^*

c) Vert et blanc

$PPCM(45; 150) = 15PPCM(3; 10) = 15(30) = 450$ **alors** $I_E = 450k$ **????** N^*

d) Rouge ; vert et blanc

$PPCM(18; 45; 150) = 3PPCM(6; 15; 50) = 3(150) = 450$ **alors** $I_E = 450k$ **????** N^*