OUVRAGE COLLABORATIF

100% GRATUIT

MATHEMATIQUES en T^{le} D

Cours • Exercices

Conformes au nouveau programme en vigueur au Cameroun

Document libre et gratuit. Ne peut être vendu

Groupe WhatsApp

LES GRANDS PROFS DE MATHS

3EME EDITION

AVANT-PROPOS

Dans un contexte où l'insertion dans le monde de l'emploi est devenue de plus en plus difficile, beaucoup de pays ont opté pour un système éducatif solide où l'apprenant participe à la construction des savoirs qui lui permettront de maitriser son environnement en faisant face à des situations de vie réelles, complexes et diversifiées, une école intégrée, soucieuse du développement durable, et prenant en compte les cultures et les réquisits locaux à la place d'une école coupée de la société. C'est ainsi que dès 2014, le Cameroun a emboité le pas à d'autres pays africains et a ouvert ses portes à l'APC qui complètera progressivement l'APO jusqu'en classe de terminale en 2020. Pour le gouvernement, c'est un outil majeur pour atteindre l'émergence en 2035. Un groupe de jeunes enseignants soucieux de l'éducation en Afrique en générale et au Cameroun en particulier a donc décidé de ne pas rester spectateur et de jouer les premiers rôles dans ce processus. Cet ouvrage et toute la collection de la 6ème en Terminale sont l'œuvre de ce groupe d'enseignants dynamiques et rompus à la tâche. Ils sont réunis dans un forum whatsapp dénommé « Grandprofs de maths (GPM) ». Cette 3ème édition est le fruit de l'un de ses objectifs majeurs, conséquence de trois mois et demi de travail à parti du 27/07/2020.

Conçus pour aider le personnel enseignant ainsi que ceux qui seront dans le besoin, cette édition n'a pas la prétention de remplacer les livres inscrits au programme mais d'être un complément d'outil de ces derniers. Chaque leçon de cette édition respecte les dernières mises à jour qu'a connues l'APC qui est encore jeune et en mutation au Cameroun. Ainsi, pour toutes les leçons de cette 3ème édition et dans toutes les classes, une forte corrélation est établie entre situation problème et activités d'apprentissages. L'objectif ici étant d'aider l'apprenant à dérouler lui-même les ressources de la leçon qui lui sont nécessaires à la résolution de la tâche évoquée par la situation problème.

Cette édition doit son succès à un groupe d'enseignants de mathématiques exerçant dans toutes les régions du Cameroun. Une mention spéciale est à décerner à tous les chefs d'ateliers qui ont travaillé inlassablement pour mener ce projet à bon port ; aux administrateurs, et au premier rang M. POUOKAM NGUEGUIM Léopold Lucien qui a su remobiliser les troupes quand le déroulement des travaux a connu un coup à cause de la rentrée scolaire ; difficile de ne pas mentionner l'un des pédagogues dont la contribution pour la fusion des documents a été capital, il s'agit de M. Ngandi Michel. Nous ne saurons terminer sans féliciter les acteurs principaux, ceux-là qui ont cru en ce projet, y ont consacré leur précieux temps et leur savoir-faire non seulement dans la réalisation d'au moins l'un des 185 chapitres du projet mais aussi pour les critiques constructives qui ont permis d'optimiser la qualité des cours produits.

La perfection étant utopique, nous avons l'intime conviction et le ferme espoir que les éventuelles coquilles que pourrait contenir un document de cette collection rencontreront l'indulgente compréhension des utilisateurs. Toutefois, toutes éventuelles suggestions ou critiques constructives peuvent être envoyé via l'une des adresses mails suivantes : leopouokam@gmail.com ou gkppedro@yahoo.fr,

Tous les enseignants ou passionnés de mathématiques désirant faire partie de la famille « GPM » et disponibles à participer aux futurs projets du groupe peuvent écrire via whatsapp à l'un des administrateurs ci-dessous nommés:

M. GUELA KAMDEM Pierre (697 473 953 / 678 009 612), M. POUOKAM NGUEGUIM Léopold Lucien (696 090 236/651 993 749), M. TACHAGO WABO Wilfried Anderson (699 494 671) , M. NTAKENDO Emmanuel (676 519 464) et M. NGANMENI KONGUEP Herve Battiston (674565834) .

NB : toute utilisation d'un document de cette collection à but lucratif est formellement proscrite.

LES AUTEURS.

Liste des enseignants ayant participé au projet dans l'atelier Terminale littéraire sous la coordination de M. POUOKAM NGUEGUIM Léopold Lucien

CHAPITRES	NOMS ET PRENOMS	NUMEROS
FONCTION NUMERIQUE D'UNE VARIABLE REELLE	NGOUNOU LOVE MICHAELLE EPSE CACTCHA	675559173
NOMBRES COMPLEXES	NZOUEKEU MBITKEU PATRICE	676764402
THEORIE DES GRAPHES	TOKO DEDAMA CHERIFAIN	695798901
PRIMITIVE D'UNE FONCTION CONTINUE SUR UN INTERVALLE	NGANMENI KONGUEP HERVE BATTISTON	674565834
SIMILITUDES	KOGOUI NGUIMETSA SYLVAIN	696216943
FONCTION LOGARITHME NEPERIEN	NOAH CLEMENT	696767021
FONCTION EXPONENTIELLE	TEDJOU BIENVENU	675507439/ 698214667
SUITES NUMERIQUES	EBALA SEBASTIEN	690939316/679394029
CALCUL INTEGRAL	KENTSOPMO	697435438/675301462
EQUATIONS DIFFERENTIELLES	NGANKOU SERGE OTIS	676226688
STATISTIQUES	DENGBIA NADINE FLORE	675689842
PROBABILITÉ	FONKOU OLIVER	695817642

Module 25	RELATIONS ET OPERATIONS FONDAMENTALES DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES REELS

CHAPITRE 1

FONCTION NUMERIQUE D'UNE VARIABLE REELLE

Intérêt : Le chapitre vise à rendre l'apprenant compétent dans l'étude des prévisions. C'est - à - dire faire une observation par an, par jour, par heure etc.

Motivation : Déployer un raisonnement mathématique pour résoudre des problèmes relatifs à des situations de vie faisant appel aux fonctions numériques.

Prérequis : Calculer la limite d'une fonction, étudier la continuité, calculer la dérivée et donner le sens de variation.

LEÇON 1

Fonctions continues

Durée : 100 minutes

L'étude de continuité est surtout de s'assurer de l'existence d'une solution sur un intervalle donné.

OBJECTIFS PEDAGOGIQUE

- Déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue ;
- Connaître et utiliser le théorème des valeurs intermédiaires ;
- Déterminer les solutions de l'équation $f(x) = 0$;
- Montrer que la restriction d'une fonction à un intervalle est bijective

SITUATION PROBLEME

Un père pour scolariser son enfant plus facilement dans le secondaire, décide à la naissance de son premier fils Isaac, de placer une somme d'un million dans une banque à un taux d'intérêt annuel de t%. Son fils devra commencer la classe de $6^{\text{ième}}$ à 10 ans. Mais son ami lui dit que déposer son argent a la banque n'est pas toujours une garantie qu'il pourra financer les études de son fils avec aisance . Il sollicite votre aide pour savoir ce qu'il aura dans son compte après 5ans si la banque lui propose un taux d'intérêt de 6,5%.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

On donne la fonction $f(x) = x^3 + x + 1$;

1) Calculer $f(10)$, $f(-1)$ et $f(0)$.
2) Déterminer l'image par f de l'intervalle $[-1; 0]$
3) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α dans l'intervalle $[-1; 0]$;
4) Si les frais de scolarisation de Isaac s'élèvent à sept millions de franc cfa pour tout son parcours secondaire, son père pourra-t-il les régler si $t \in \ ]6{,}5; 10]$

Résolution de l'activité d'apprentissage

1) $f(10) = 11$; $\boldsymbol{f}(-1) = -1$; $\boldsymbol{f}(0) = 1$

2) $f([-1; 0]) = [-1; 1]$ car la fonction f est une fonction continue sur son domaine de définition

3) La fonction f est une fonction polynôme donc elle est continue sur l'intervalle $[-1; 0]$ et $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ donc f est strictement croissante sur l'intervalle $[-1; 0]$ par ailleurs, $f(-1) = -1$ et $f(0) = 1$; $f(-1) \times f(0) < 0$ en utilisant le theoreme des valeurs intermédiaires, on conclut qu'il existe un unique nombre réel $\alpha \in [-1; 0]$ tel que $f(\alpha) = 0$

4)posons $c_{0=}$1000000 qui est le capital du père de Isaac. Après 1an on a ; $c_{1=}c_0 + c_0 \times \frac{t}{100}$ donc, pour t=6,5 ; on a $c_{1=}c_0 + c_0 \times \frac{6{,}5}{100} = c_0(1 + 0{,}065)$=1,065$c_0$=1065000F apres n annees on aura $c_{n=}1{,}065^n c_0$ alors, apres 5ans ona $c_{5=}1{,}065^5 \times 1000000 = 1370086{,}66F$

RESUME

Fonction continue en un point

Soit f une fonction continue définie sur son domaine de définition et $x_0 \in D_f$, f est continue en x_0 ssi $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Exemple : On donne $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 \ \ si\ x \geq 0 \\ \frac{x+1}{x-1}\ si\ x < 0 \end{cases}$

Etudier la continuité de f en 0. Dans ce cas $x_0 = 0$ $\lim_{x \to 0^-} f(x)$=$\lim_{x \to 0^-} \frac{x+1}{x-1}$=-1

Et $\lim_{x \to 0^+} f(x)$=$\lim_{x \to 0^+} x^2 + 2x - 1 = -1$;$f(0) = -1$ comme $\lim_{x \to 0^+} f(x)$=$\lim_{x \to 0^-} f(x)$= $f(0)$ alors f est continue en 0

1) Prolongement par continuité

- Si une fonction f n'est pas définie en x_0, mais admet une limite lorsque $x \to x_0$, alors on peut prolonger cette fonction par continuité en x_0 ;
- Si g est le prolongement par continuité alors :

$$\begin{cases} g(x) = f(x)\ si\ x \neq x_0 \\ g(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x) \end{cases}$$

Exemple : On donne $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$; f est-elle prolongeable par continuité en 1, -1?

Si oui, déterminer ce prolongement g par continuité.

2) Fonction continue sur un intervalle

a) Définition

Soit f une fonction numérique définie sur son domaine de définition, $I \subset D_f$. On dit que la fonction f est continue sur l'ensemble I, si et seulement si f est continue en tout point x_0 de I.

b) Théorème

Une fonction définie sur un intervalle I est continue en un point x_0 de I si et seulement si f est continue à gauche et à droite de x_0.

c) Propriétés

- Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I, et k un nombre réel alors les fonctions $f + g; f \times g; k \times f\ et\ |f|$ sont continues sur I ;
- Si f est continue et positive sur un intervalle I, alors $\sqrt{f}$ est continue sur I ;
- Si f est continue et non nulle sur un intervalle I, alors la fonction $\frac{1}{f}$ est continue sur I

Exemple : Etudier sur le domaine de définition la continuité de la fonction $f(x) = \frac{1-x}{2+x^2}$

d) Image d'un intervalle par une fonction continue

L'image d'un intervalle I par une fonction continue f est un intervalle noté $f(I)$

3) Fonction continue et strictement monotone

Pour donner l'image exacte d'un intervalle par une fonction continue f, il est toujours nécessaire de connaître le sens de variation de la fonction f.

a) Propriétés

- Si f est continue strictement croissante sur l'intervalle $[a;b]$ alors :

$f([a,b]) = [f(a), f(b)]$;

$f(]a,b[) =]\lim\limits_{x \to a^+} f(x), \lim\limits_{x \to b^-} f(x)[$

- Si f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[a;b]$ alors :

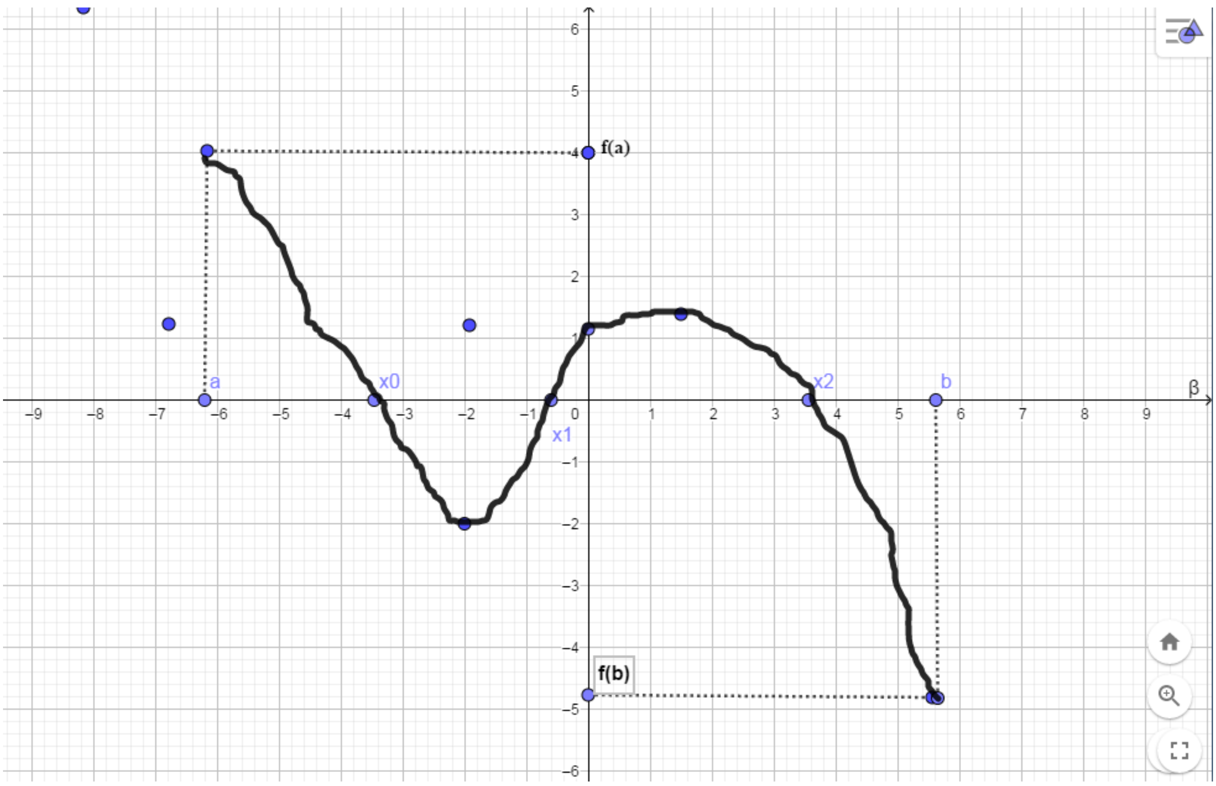
$f([a;b]) = [f(a); f(b)]$ et $f(]a;b[) =]\lim\limits_{x \to b^-} f(x) \; ; \lim\limits_{x \to a^+} f(x) \; [$

b) Calcul approchée des zéro d'une fonction

Soit a et b deux nombres réels tel que a<b

Théorème 1

Si f est continue sur $[a;b]$ et $f(a) \times f(b) < 0$ alors il existe au moins un nombre réel $\alpha \in [a;b]$ tel que $f(\alpha) = 0$.



f est continue sur $[a;b]$ $f(a) \times f(b) < 0$ alors il existe $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in [a;b]$ tel que $f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = f(\alpha_3) = 0$

Théorème 2 : Théorème des valeurs intermédiaires.

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle [a; b] et $f(a) \times f(b) < 0$ alors il existe une unique valeur $a \in [a;b]$ solution de l'équation $f(x) = 0$.

Exemple : Montrer que l'équation $2x^3 - 3x^2 + \frac{1}{2} = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ exactement trois solutions $x_0,\ x_1,\ x_2$

Conséquence

Si la fonction f est continue sur $[a;b]$ et si $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution $x_0 \in\ ]a;b[$. Si en plus f est strictement monotone sur$[a;b]$, alors x_0 est unique.

Exemple montrer que l'équation $x^5 + x - 3 = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$

c) Fonction continue et strictement monotone

Soit f une fonction continue et strictement croissante (ou strictement décroissante) sur un intervalle I, Alors :

- $f(I)$ est un intervalle
- f définit une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle $f(I)$
- la bijection réciproque f^{-1} de f est continue sur l'intervalle $f(I)$ et a le même sens de variation que f sur cet intervalle
- dans le plan rapporté à un repère orthogonal, les courbes (C_f) de f et $(C_{f^{-1}})$ de f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice $y = x$.

Remarque

- Toute asymptote verticale à (C_f) d'équation $x = a$ devient une asymptote horizontale d'équation $y = a$ à $(C_{f^{-1}})$ et réciproquement.
- Le point de (C_f) de coordonnées $(a;b)$ a pour asymptote le point de $(C_{f^{-1}})$ de coordonnées $(b;a)$

Exemple : Soit $\begin{array}{l} f:\,]-\infty;0[\to\mathbb{R} \\ x\to\frac{1}{x}\end{array}$

1. Montrer que f réalise une bijection d'un intervalle vers un autre que l'on déterminera
2. représenter la courbe de f et celle de f^{-1} dans un même repère.

Exercice: L'enseignant donnera les exercices du livre.

LEÇON 2

Dérivabilité

Durée : 100 minutes

INTERET

L'étude de la dérivabilité prépare l'apprenant à mieux étudier les phénomènes observables en repérant les points de chute sensible, (baisse ou augmentation quantité minimale ou maximale)

PRE-REQUIS

- dérivée une fonction numérique
- donner le sens de variation d'une fonction

OBJECTIF PEDAGOGIQUES

- dérivée la bijection réciproque d'une fonction numérique
- résoudre les équations de type $x^n = a$ où n est un nombre rationnel
- simplifier des expressions ayant des puissances rationnelles
- énoncer les inégalités des accroissements finis et les utiliser pour comparer certaines fonctions

SITUATION PROBLEME

Monsieur Talla possède une agence de déménagement chaque jour lorsqu'il associe le nombre de manœuvre à la somme à payer pour un déménagement, il obtient la fonction $f(x) = 4000\left(\frac{x^2+5x+4}{x}\right)$ qui représente le coût d'un déménagement avec x le nombre de manœuvre. Il souhaite savoir le nombre de manœuvre qu'il lui faut pour que la somme à payer soit minimale. Aide-le.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

On considère la fonction $g(x) = 1000(\frac{x^2+10x+25}{x+1})$

1. Quel est l'intervalle sur laquelle la fonction g est positive?
2. Calculer la dérivée de la fonction g sur cet intervalle et donner son tableau de variation
3. Pour quelle(s) valeur(s) de x la fonction g est minimale? donner le nombre dérivé de x en ce point et étudier la dérivabilité de g en -1
4. Déterminer le nombre de manœuvre pour lequel le coût d'un déménagement est minimal

RÉSUMÉ

1) Dérivabilité en un point

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur un intervalle $I \subset D_f$; $x_0 \in I$ et l un nombre réel. On dit que la fonction f est dérivable en x_0 ssi $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l$ existe et est finie.

Le nombre $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est appelé nombre dérivé de f en x_0. L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_0 est :

$$(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f'(x_0)$$

2) Dérivabilité à droite et à gauche de x_0

Soit f une fonction numérique, f est dérivable en x_0 ssi

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ existe et est finie.}$$

$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f_g'(x_0)$= dérivabilité de f à gauche de x_0 et

$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f_d'(x_0)$= dérivabilité de f à droite de x_0

3) Dérivabilité sur un intervalle

Une fonction f définie sur un intervalle I est dite dérivable sur l'intervalle I lorsque f est dérivable en tout point x_0 de l'intervalle I

Remarque:

- Pour étudier la dérivabilité d'une fonction f sur un intervalle de la forme $[a; b]$, on étudie la dérivabilité de f sur $]a; b[$, puis à droite en a et à gauche en b.
- Toute fonction dérivable en un réel x_0 est aussi continu en x_0. La réciproque n'est pas toujours vraie.

4) Dérivée successive : point d'inflexion

Lorsque la dérivée seconde s'annule en un point d'abscisse x_0 en changeant de signe, alors le point x_0 est appelé « **point d'inflexion**».

Au point d'inflexion, la courbe traverse la tangente et change de concavité

5) Dérivation de la bijection réciproque

Soit f une fonction numérique et I un intervalle. Si la dérivée de f ne s'annule pas sur l'intervalle I alors la bijection réciproque f^{-1} de f est dérivable sur l'intervalle $f(I)$ et pour tout y de $f(I)$, on a : $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

Si f' s'annule en x_0, alors f^{-1} n'est pas dérivable en $y = f(x_0)$

Exemple Déterminer la dérivée de f^{-1} dans chacun des cas suivants

a) f: $\begin{array}{ccc} [1;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \to & f(x)=\sqrt{x-1} \end{array}$ *puis calculer* $(f^{-1})(2)$

b) g: $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \sin x \end{array}$ *puis calculer* $(g^{-1})'(\frac{1}{2})$;

6) Fonctions à exposant rationnel

a) Définition

Soit $r \in \mathbb{Q}^*$, on appelle fonction puissance d'exposant r la fonction f: $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \to & x^r \end{array}$

Domaine de définition, $D_f = \begin{cases} \mathbb{R}_+ \; si \; r \geq 0 \\ \mathbb{R}_+^* \; si \; r \leq 0 \end{cases}$

b) *Résolution dans* $\mathbb{R}$ *de l'équation* $x^r = a$ *où n est un nombre rationnel.*

Soit $a \in \mathbb{R}^*; n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ *Soit l'équation (E) :* $x^n = a$.

Propriétés

P1 pour tous réels x et y positifs, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2, x^n = y \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y}$

P2 n est pair

- si $a < 0$, alors l'équation (E) n'admet pas de solution, $S = \emptyset$
- si $a > 0$, alors $S_{(E)} = \{\sqrt[n]{a}; -\sqrt[n]{a}\}$

P3 n est impair

- si $a > 0$, alors $S = \{\sqrt[n]{a}\}$
- si $a < 0$, alors $-x^n = -a$

$$(-x)^n = -a$$

$$-x = -\sqrt[n]{-a}$$

$$S = \{-\sqrt[n]{-a}\}$$

Remarque

$\forall n \in \mathbb{N}^*, x^n = 0 \Leftrightarrow x = 0$

NB: le symbole $\sqrt[n]{}$ est appelé racine n-ième, $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

c) simplification des expressions ayant des puissances rationnels, a et b des réels positifs.

- $a^r \times b^r = (a \times b)^r$
- $a^r \times a^{r'} = a^{r+r'}$
- $(a^r)^{r'} = a^{r+r'}$
- $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$
- $\frac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'}$

Exemple

a) $(64)^{\frac{2}{3}} = \left(64^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{64}\right)^2 = 4^2 = 16$; b) $(81)^{\frac{-3}{4}} = \frac{1}{81^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\left((81)^{\frac{1}{4}}\right)^3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

Exercice d'application

Simplifier les expressions suivantes $A = \frac{\sqrt[3]{a^5} \times \sqrt[4]{a^7}}{(a^2)^2 \times \sqrt[5]{a^2} \times \sqrt{a^3}}$; $B = \frac{a^{\frac{2}{3}} \times b^{\frac{2}{5}}}{5\sqrt{a} \times \sqrt[5]{\sqrt[3]{\frac{1}{b}}}} \times \sqrt[15]{a^8 \times b^6}$

7) *Inégalité des accroissements finis*

a) Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, a et b deux nombres réels éléments de I tel que $a < b$.

S'il existe deux nombres réels m et M tel que $m \leq f'(x) \leq M$, alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq (b-a)$

Exemple Démontrer que pour $\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $\frac{\sqrt{2}}{2}x \leq sinx \leq x$

Exercice d'application

Soit la fonction $\begin{matrix} g: [0,\frac{\pi}{2}] \to [0,1] \\ x \to cosx \end{matrix}$

a) montrer que la fonction g est une bijection
b) Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]: 1 - x \leq cosx \leq 1 + x$

Devoir (l'enseignant proposera les exercices du livre de l'élève)

LEÇON 3

Représentation graphique

Durée : 100 minutes

La représentation graphique ou la courbe représentative d'un phénomène observable facilite son interprétation.

PREREQUIS

- Etudier la continuité et la dérivabilité d'une fonction numérique
- Lire les images et les antécédents et les interpréter.

OBJECTIFS PEDAGOGIQUE

- Rechercher les branches infinies à une courbe
- Etudier une fonction et la représenter graphiquement

SITUATION PROBLEME

Mme MBALLA va à l'hôpital avec son bébé, le médecin lui dit que la croissance de son bébé est très rapide et décide de la construire pour mieux expliquer à Mme MBALLA ce qu'il en est. La fonction de croissante du bébé est $C(t) = t^2 - 4t + 5$ où t est le temps exprimé en mois et observé depuis que le bébé a eu 6 semaines.

Aide ce médecin à présenter la courbe de croissance du bébé depuis qu'il a 6 semaines et plus.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

On considère la fonction $f(x) = x^2 - 4x + 5$

1) Déterminer les extrémums à a la courbe de f s'il y en a ;
2) Calculer les limites de f aux bornes de D_f et interpréter
3) Peut-on dire que lorsque $t \in [3; 5]$, la croissance de l'enfant de Mme MBALLA va ralentir ?

RESUME

1) Etude des branches infinies

Pour étudier les branches infinies d'une fonction, on procède de la manière suivante :

- Calcule des limites aux bornes du domaine de définition
  - → Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ on calcule $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$
  - → Si $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors la courbe de f admet une branche parabolique de direction la droite (Ox) ;
  - → Si $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$, alors la courbe de f admet une branche parabolique de direction la droite (Oy) ;
  - → Si $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$, alors on calcule $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - ax]$

→

1^er^ cas : si $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax] = \infty$ alors la courbe de f admet une branche parabolique de direction asymptotique $y = ax$ 2^e^ cas : si $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax] = b \in \mathbb{R}$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est Asymptote oblique à la courbe de f.

Exemple : Déterminer les branches infinies de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$

2) Etude et représentation graphique de quelques fonctions irrationnelles et trigonométrique

a) Plan d'étude d'une fonction

Soit f une fonction numérique et C_f sa courbe représentative. Pour étudier la fonction f on peut adopter le plan suivant :

i. Etude des variations de f

Ici il faut :

- Déterminer le domaine d'étude D_E de f en étudiant éventuellement la parité, la périodicité et les éléments de symétrie ;
- Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur D_f ;
- Dresser le tableau de variation ;
- Calculer les limites de f aux bornes de D_f

ii. Etudier les branches infinies

Il s'agit de déterminer les asymptotes à (C_f) si elles existent, les directions des branches paraboliques à (C_f) si elles existent.

iii. Construire la courbe

- Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère ;
- Dresser éventuellement le tableau de (C_f)
- Préciser les points d'inflexion et les points anguleux, tracer les tangentes à ces points à (C_f) ;
- Tracer soigneusement la courbe (C_f) de f.

Exemples

Exemple 1 D on considère la courbe $f(x) = \frac{2x^3+6x^2+6x+29}{2(x+1)^2}$

1. Etudier les variations de f ;
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique α tel que $-3{,}5 < \alpha < -3$;
3. Etudier les branches infinies à (C_f) ;

4. Tracer (C_g) dans un repère orthogonal dont les unités sont 1cm sur (OI) et 0,5 cm sur (OJ).

Exemple 2

Soit la fonction $g(x) = \sqrt{(x-1)^2 + \frac{2}{+1}}$

1. Déterminer le domaine de définition puis simplifier l'écriture de $g(x)$ sur D_g ;
2.
   a) Etudier la continuité de g sur D_g ;
   b) Calculer les limites de f aux bornes de D_g;
3. .
   a) Déterminer le domaine de dérivabilité de g et calculer g' ;
   b) Etudier la dérivabilité de g en 1, puis écrire l'équation de la démis-tangente à g en 1
   c) Dresser le tableau de variation de f
4. .
   a) Etudier les branches infinies à (C_f)
   b) Déterminer les points d'intersections de (C_f) avec es axes du repère
5. Tracer (C_f) et ses tangentes.

Exemple 3 Etudier la fonction $f(x) = \frac{4sin^2x+3sinx}{sinx+1}$

Module 27	CONFIGURATION ET TRANSFORMATIONS ÉLÉMENTAIRES DU PLAN

Chapitre 2 : NOMBRES COMPLEXES

INTERET:

Les nombres complexes sont d'une grande utilité tant en mathématiques qu'en sciences physiques. Ils permettent en particulier l'étude de circuits électroniques en régime sinusoïdal et ils jouèrent un rôle déterminant dans la théorie de diffusion de la chaleur, de l'électricité et de la lumière développée par Maxwell. Dans ce chapitre, on reprend et approfondit les notions apprises en première quant aux nombres réels. On verra en particulier comment on peut les utiliser pour trouver les racines de certains polynômes à coefficients réels ou complexes.

Leçon 1 : GÉNÉRALITÉS SUR LES NOMBRES COMPLEXES

Durée : 100 minutes

MOTIVATION :

Dans cette leçon il s'agira de compléter les insuffisances de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Pour cela nous allons découvrir un nouvel ensemble noté $\mathbb{C}$ (ensemble des nombres complexes).

PRE-REQUIS :

Maitriser toutes les opérations dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

COMPETENCES A ACQUERIR PAR LES ELEVES :

- Donner la partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe à partir de son écriture algébrique ou cartésienne ; Reconnaître un nombre complexe réel et un nombre complexe imaginaire pur ;
- Représenter le point image d'un nombre complexe dans le plan ;
- Déterminer l'écriture algébrique d'un quotient, d'une somme ou d'un produit de deux nombres complexes

SITUATION PROBLEME :

MOUSSA et ALIOUM veulent résoudre l'équation $x^2 + 25 = 0$. ALIOUM affirme que cette équation n'admet pas de solution dans l'ensemble $\mathbb{R}$. MOUSSA conteste en disant qu'il existe un ensemble dans lequel cette équation admet une solution. Lequel des deux a raison ? Si oui aidez-le à résoudre cette équation.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE :

Soit l'équation (E): $x^2 + 9 = 0$

1) L'équation (E) admet elle une solution dans $\mathbb{R}$? Justifier votre réponse.
2) En supposant qu'il existe un nombre imaginaire i tel que $i^2 = -1$ et en conservant les règles de calcul utilisées dans $\mathbb{R}$, démontrer que (E) admet deux solutions que l'on exprimera en fonction de i.

CORRECTION DE L'ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

Soit l'équation (E): $x^2 + 9 = 0$

1) L'équation (E) n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.
2) $x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 9i^2 = 0 \Rightarrow x^2 - (3i)^2 = 0 \Longrightarrow (x - 3i)(x + 3i) = 0$

$$\Longrightarrow x - 3i = 0 \; ou \; x + 3i = 0$$

$$\Longrightarrow x = 3i \; ou \; x = -3i$$

$$\boldsymbol{S = \{-3i \; ; \; 3i\}}$$

RESUME :

1) Ensemble des nombres complexes

Une équation de la forme $x^2 = -1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. Il existe un nombre imaginaire noté i qui vérifie $i^2 = -1$ qui permet de résoudre l'équation. On a

$$x^2 = -1 \Rightarrow x^2 = i^2 \Rightarrow x = i \; ou \; x = -i$$

i est l'élément de l'ensemble des nombres complexes noté $\mathbb{C}$ qui contient tous les éléments de $\mathbb{R}$ et des éléments de la forme $a + bi$ où $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$.

On a alors : $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{D} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

2) Forme algébrique d'un nombre complexe

C'est l'écriture $a + bi$ où $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$.

Exemple: $2 - 4i$; $5 + i\sqrt{2}$; 5 ; $6i$

3) **Partie réelle et partie imaginaire d'un nombre complexe**

$$z = a + ib$$

$$a : \text{ Partie réelle} \qquad b : \text{ Partie imaginaire}$$

$$On\ note : Re(z) = a \quad et \quad Im(z) = b$$

Le nombre complexe $z = 7 - 2i$ a pour partie réelle $Re(z) = 7$ et pour partie imaginaire $Im(z) = -2$

Propriétés :

Soient deux nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$

- $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} Re(z) = Re(z') \\ Im(z) = Im(z') \end{cases}$
- $z = 0 \Leftrightarrow Re(z) = 0 \ \ et \ \ Im(z) = 0$

4) **Nombres imaginaires purs**

Ce sont des nombres complexes de la forme ai ou ia avec $a \in \mathbb{R}^*$. Par exemple les nombres complexes $6i$ et $i\sqrt{3}$.

$$(z \text{ imaginaire pur}) \Leftrightarrow \begin{cases} Re(z) = 0 \\ Im(z) \neq 0 \end{cases}$$

$$(z \text{ est un nombre réel}) \Leftrightarrow Im(z) = 0$$

L'ensemble des nombres imaginaires purs se note $i\mathbb{R}^*$.

Correction de la situation problème : Moussa a raison car il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ dans lequel il existe un nombre i tel que $i^2 = -1$. En prenant $x = -5i$ ou $x = 5i$ on a le résultat d'où $x = -5i$ ou $x = 5i$ sont des solutions de l'équation $x^2 + 25 = 0$.

Leçon 2 : CALCULER AVEC LES NOMBRES COMPLEXES

Durée : 100 minutes

MOTIVATION :

Dans cette leçon il s'agira d'effectuer des calculs dans un nouvel ensemble noté $\mathbb{C}$ (ensemble des nombres complexes).

PRE-REQUIS :

Maitriser toutes les opérations dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

COMPETENCES A ACQUERIR PAR LES ELEVES :

- Déterminer l'écriture algébrique d'un quotient, d'une somme ou d'un produit de deux nombres complexes
- Déterminer l'écriture algébrique du conjugué d'un nombre complexe donné ; Calculer le conjugué et le module d'un nombre complexe connaissant sa forme algébrique.

SITUATION PROBLEME :

Soient $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = 1 + i$ deux nombres complexes.

Calculer $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \times z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $\overline{z_1}$; $\overline{z_2}$; $|z_1|$; $|z_2|$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE :

1) Vérifier rapidement que les apprenants ont en mémoire les différentes égalités remarquables, la formule du binôme de Newton et la formule des sommes géométriques
   - $1 + q + q^2 + \ldots + q^n$
   - $(Z + Z')^2 = Z^2 + 2ZZ' + Z'^2$
   - $(Z - Z')^2 = Z^2 - 2ZZ' + Z'^2$
   - $(z + z')^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (z)^{n-k} (z')^k$

2) Soient $z_1 = 3 - i$ et $z_2 = 5 + i$ deux nombres complexes.

Calculer $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \times z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $\overline{z_1}$; $\overline{z_2}$; $|z_1|$; $|z_2|$

RESUME:

Les règles de calcul dans $\mathbb{C}$ sont les mêmes que ceux de $\mathbb{R}$.

1) Egalité de deux nombres complexes

Soient deux nombres complexes $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$. On a :

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

Exemple : $z = 5 - 3i$ et $z' = 5 + (4 + x)i$. Calculons x pour que $z' = z$

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = 5 \\ -3 = (4 + x) \end{cases}$$

Et on trouve $x = -7$

2) Addition de deux nombres complexes

Soient deux nombres complexes $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$. On a :

$$z + z' = a + bi + a' + b'i = a + a' + i(b + b')$$

On en déduit que $\begin{cases} Re(z + z') = Re(z) + Re(z') = a + a' \\ Im(z + z') = Im(z) + Im(z') = b + b' \end{cases}$

Exemple : Soient deux nombres complexes $z = -3 + 2i$ et $z' = 5 + 6i$. On a :

$$z + z' = -3 + 2i + 5 + 6i = -3 + 5 + i(2 + 6) = 2 + 8i$$

3) Soustraction de deux nombres complexes

Soient deux nombres complexes $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$. On a :

$$z - z' = a + bi - (a' + b'i) = a - a' + i(b - b')$$

On en déduit que $\begin{cases} Re(z - z') = Re(z) - Re(z') = a - a' \\ Im(z - z') = Im(z) - Im(z') = b - b' \end{cases}$

Exemple : Soient deux nombres complexes $z = -3 + 2i$ et $z' = 5 + 6i$. On a :

$$z - z' = -3 + 2i - (5 + 6i) = -3 + 2i - 5 - 6i = -3 - 5 + i(2 - 6) = -8 - 4i$$

4) Produit de deux nombres complexes

a) Puissances entières du nombre i

On a $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$; $i^5 = i$; $i^6 = -1$

On déduit que $\forall k \in \mathbb{N}$; $i^{4k} = 1$; $i^{4k+1} = i$; $i^{4k+2} = -1$; $i^{4k+3} = -i$

Exemple :

$$i^{2007} = i^{4\times 501+3} = (i^4)^{501} \times i^3 = 1^{501} \times i^3 = 1 \times (-i) = -i$$

Calculer i^{3600} ; i^{10000} ; i^{5700}

Dans toute opération où cela est nécessaire, i^2 est remplacé par -1 ou bien -1 est remplacé par i^2.

b) Produit de deux nombres complexes $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$

Soient deux nombres complexes $z = a + bi \ et \ z' = a' + b'i$. On a :

$$zz' = (a + bi)(a' + b'i) = aa' + ab'i + a'bi - bb' = aa' - bb' + i(a'b + ab')$$

On en déduit que $\begin{cases} Re(zz') = aa' - bb' \\ Im(zz') = a'b + ab' \end{cases}$

Exemple :

$$z = 1 - 2i \ et \ z' = -3 + i$$

$$zz' = (1 - 2i)(-3 + i) = -3 + i + 6i + 2 = -1 + 7i$$

c) Quotient de deux nombres complexes

Soient deux nombres complexes $z = a + bi \ et \ z' = a' + b'i$. On a :

$$\frac{z'}{z} = \frac{a' + b'i}{a + bi} = \frac{(a' + b'i)(a - bi)}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a'a - a'bi + ab'i + bb'}{a^2 - abi + abi + b^2} = \frac{aa' + bb'}{a^2 + b^2} + i\frac{ab' - a'b}{a^2 + b^2}$$

On en déduit que $\begin{cases} Re\left(\frac{z'}{z}\right) = \frac{aa'+bb'}{a^2+b^2} \\ Im\left(\frac{z'}{z}\right) = \frac{ab'-a'b}{a^2+b^2} \end{cases}$

Exemple :

$$z = 1 - 2i \ et \ z' = -3 + i$$

$$\frac{z'}{z} = \frac{-3 + i}{1 - 2i} = \frac{(-3 + i)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} = \frac{-3 - 6i + i - 2}{1 + 2i - 2i + 4} = \frac{-5 - 5i}{5} = -1 - i$$

d) Conjugué d'un nombre complexe $z = a + bi$

C'est le nombre complexe $\bar{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{bi}$ tel que : $\begin{cases} Re(\bar{z}) = Re(z) \\ Im(\bar{z}) = -Im(z) \end{cases}$

Exemple : Les nombres complexes $z = 1 - 2i \ et \ z' = -3 + i$ ont pour conjugué respectifs

$$\bar{z} = 1 + 2i \ et \ \bar{z}' = -3 - i$$

Propriétés :

- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$
- $z \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \bar{z} = -z$

  $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$
- $\bar{\bar{z}} = z$
- $\overline{zz'} = \bar{z} \times \overline{z'}$
- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$ avec $(z' \neq 0)$
- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ avec $(z \neq 0)$
- $z = a + bi \qquad \bar{z} = a - bi \qquad z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$

e) Module d'un nombre complexe $\boldsymbol{z = a + bi}$

C'est le nombre réel positif $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

Exemple : $z = 3 + 2i$

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(3 + 2i)(3 - 2i)} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

Propriétés : $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$

- $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ avec $(z \neq 0)$
- $|z^n| = |z|^n$
- $|z|^2 = z\bar{z}$
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|\bar{z}| = |z|$
- $|zz'| = |z| \times |z'|$
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ avec $(z' \neq 0)$

Correction de la situation problème :

- $|z_1| = |z_2| = \sqrt{2}$
- $z_1 + z_2 = 2$
- $z_1 + z_2 = -2i$
- $z_1 \times z_2 = 2$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1-i}{1+i} = \frac{-2i}{2} = -i$

Leçon 3 : REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE
Durée : 100 minutes

MOTIVATION :

Dans cette leçon il s'agira de représenter graphiquement un nombre complexe.

PRE-REQUIS :

Maitriser toutes les opérations dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

COMPETENCES A ACQUERIR PAR LES ELEVES :

- Représenter le point image d'un nombre complexe dans le plan ;
- Représenter dans le plan complexe, le point image et le vecteur image d'un nombre complexe.

SITUATION PROBLEME :

Placer dans le plan complexe les points d'affixes $z_A = 1 + i$ et $z_B = 1 - i$

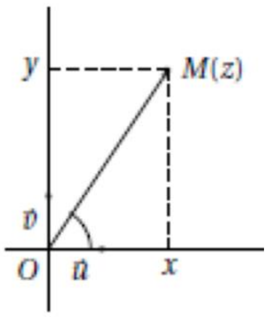
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v}\,)$, on donne les points $A\ et\ B$ d'affixes respectives : $z_A = -1 - 5i$ et $z_B = 4 - 3i$ puis le point C de coordonnées $(-2; 1)$.

1) Donner les coordonnées de $A\ et\ B$ puis l'affixe de C.
2) Déterminer l'affixe du point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.

   Calculer l'affixe du point C' symétrique de D par rapport à C

RESUME:

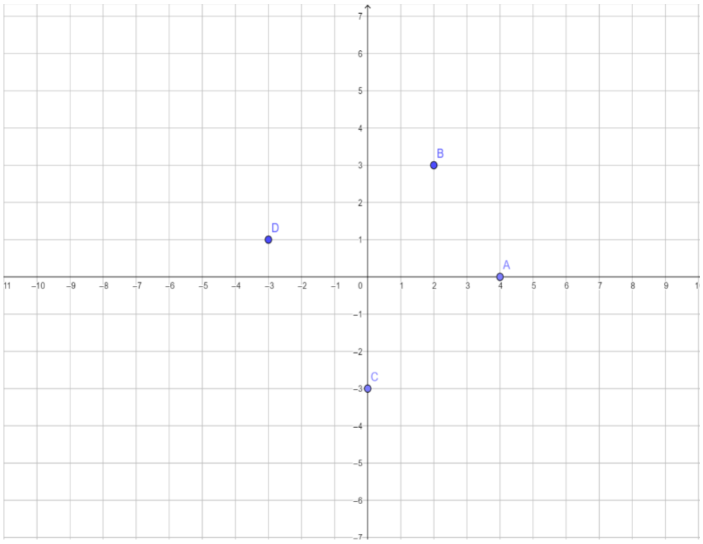


$(o, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé. $\boldsymbol{z = x + iy}$ est représenté par le point $\boldsymbol{M(x\,;\,y)}$. $\boldsymbol{M(x\,;\,y)}$ est **le point image** de $z = x + iy$. $\boldsymbol{z = x + iy}$ est **l'affixe** du point $M(\boldsymbol{x}\,;\,\boldsymbol{y})$.

$\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$ est le vecteur image de z. $\boldsymbol{z_{\overrightarrow{OM}}}$ est **l'affixe du vecteur** $\overrightarrow{OM}$. Le plan s'appelle **plan complexe.** L'axe des abscisses est encore appelé **axe réel** et l'axe des ordonnées est encore appelé **axe imaginaire.**

Exemple :

Placer dans le plan les points A, B, C, D d'affixes respectifs $4\,;\ 2 + 3i\,;\ -3i\,;-3 + i$.

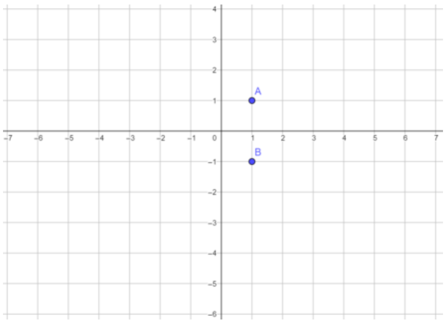


Remarque :

$$\boldsymbol{z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 2 + 3i - 4 = -2 + 3i}$$

$$\boldsymbol{|z_{\overrightarrow{AB}}| = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{13}}$$

Correction de la situation problème :



Leçon 4 : FORME TRIGONOMÉTRIQUE ET FORME EXPONENTIELLE D'UN NOMBRE COMPLEXE NON Nul

Durée : 100 minutes

MOTIVATION :

Dans cette leçon il s'agira d'étudier les formes trigonométrique et exponentielle d'un nombre complexe. Cette leçon nous permettra de linéariser une puissance entière de cosinus ou de sinus.

PRE-REQUIS :

- Maitriser toutes les opérations dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
- Maitriser la table de PASCAL et le binôme de NEWTON.

COMPETENCES A ACQUERIR PAR LES ELEVES :

- Linéariser une puissance entière de cosinus ou de sinus en utilisant les formules de MOIVRE et d'EULER.
- Utiliser l'identité de Moivre pour déterminer sous forme exponentielle toutes les racines $n-ièmes$ d'un nombre complexe non nul.

SITUATION PROBLEME :

Soient θ et θ' deux nombres réels et soient z et z' deux nombres complexes définis par :

$z = \cos\theta + i\sin\theta$ et $z' = \cos\theta' + i\sin\theta'$. Démontrer les égalités suivantes :

- $(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') = \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')$
- $\frac{1}{(\cos\theta + i\sin\theta)} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$
- $\frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta' + i\sin\theta'} = \cos(\theta-\theta') + i\sin(\theta-\theta')$
- $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ (On procédera par récurrence)
- $\cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$
- $-(\cos\theta + i\sin\theta) = \cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi)$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE :

Placer sur un cercle trigonométrique les points correspondant à : $\frac{237\pi}{6}$; $\frac{14\pi}{3}$; $\frac{-35\pi}{4}$; $\frac{133\pi}{2}$.

Donner (sans justification) les valeurs exactes de : $\sin\frac{237\pi}{6}$; $\cos\frac{14\pi}{3}$; $\sin\frac{-35\pi}{4}$; $\sin\frac{133\pi}{2}$

1) Donner en fonction de $cos\ x$ et/ou $sin\ x$ les valeurs de :

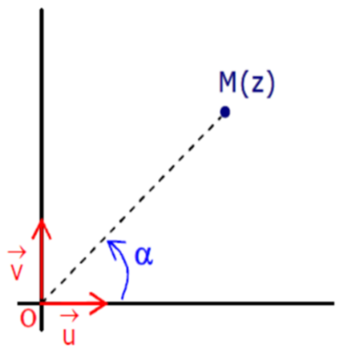
   $\cos(\frac{\pi}{2}-x)$; $\sin(\pi-x)$; $\cos(x-\frac{\pi}{3})$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $2\cos x-\sqrt{2}=0$; $\sin x=\cos 2x$

   Placer sur le cercle trigonométrique les solutions de la dernière équation.

RESUME:

1) Argument d'un nombre complexe $z = x + iy$



$(o,\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormé direct, $M(x;y)$ le point image de z.

On appelle argument de z l'angle orienté $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{oM}}\right)$

On pose $mes\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{oM}}\right)=\alpha=\arg(z)$

Exemple :

NOMBRES	$z_1 = 3$	$z_2 = 2i$	$z_3 = -2$	$z_4 = -2i$
ARGUMENT	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$-\frac{\pi}{2}$

Si θ est un argument de z, alors $\theta+2k\pi$ ($k\in\mathbb{Z}$) en est un autre. Un nombre complexe a une infinité d'arguments. L'argument principal est élément de l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$.

2) Forme trigonométrique d'un nombre complexe $z = a + bi$

C'est l'écriture $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$ où θ est un argument de z

Exemple :

$Z=1+i$ $\quad |z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ $\quad \arg(z)=\frac{\pi}{4}$ $\quad$ et $\quad z=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$

On a $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)=|z|\cos\theta+i|z|\sin\theta=a+bi$

Par identification on a : $\begin{cases}|z|\cos\theta=a\\|z|\sin\theta=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos\theta=\frac{a}{|z|}\\\sin\theta=\frac{b}{|z|}\end{cases}$

Exemple :

Donner la forme trigonométrique des nombres complexes $2\,;\ -2i\,;\ 1+i\,;\ \sqrt{3}-i$

- $|2| = 2\ \ et\ \ \arg(2) = 0$ D'où $2 = [2; 0]$
- $|-2i| = 2\ \ et\ \ \arg(-2i) = -\frac{\pi}{2}$ D'où $-2i = [2; -\frac{\pi}{2}]$
- $|1+i| = \sqrt{2}\quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\quad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\quad et\ \ \theta = \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

  D'où $1+i = [\sqrt{2}\,;\, \frac{\pi}{4}]$
- $\left|\sqrt{3}-i\right| = 2\quad \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\quad \sin\theta = \frac{-1}{2}\quad et\ \ \theta = \arg\left(\sqrt{3}-i\right) = \frac{-\pi}{6}\ [2\pi]$

  D'où $\sqrt{3}-i = [2\,;\, \frac{-\pi}{6}]$

3) Propriétés des modules et des arguments

$z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$ et pour tout entier relatif n on a

- $z' = z \Leftrightarrow |z'| = |z|$ et $\arg(z') = \arg(z) + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$
- $|zz'| = |z| \times |z'|$ et $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$
- $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ avec $(z \neq 0)$ et $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ et $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$
- $|z^n| = |z|^n$ et $\arg(z^n) = n \times \arg(z) + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

4) Forme exponentielle d'un nombre complexe $\boldsymbol{z = a + bi}$

C'est l'écriture $\boldsymbol{z = re^{i\theta}}$ dans laquelle $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$

Exemple :

Forme algébrique	$\boldsymbol{|z|}$	$\boldsymbol{\arg(z)}$	**Forme exponentielle**
$z = 1 + i\sqrt{3}$	2	$\frac{\pi}{3}$	$z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$
$z = 1 + i$	$\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$
$z = -6 - 6i\sqrt{3}$	12	$\frac{2\pi}{3}$	$z = 12e^{i\frac{2\pi}{3}}$

5) Formule de MOIVRE

Pour tout nombre réel θ et pour tout entier relatif n, on a : $\boldsymbol{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta}$

Application :

- Calculons $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2007}$

$$\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2007} = \left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{2007} = \cos\frac{2007\pi}{3}+i\sin\frac{2007\pi}{3}$$
$$= \cos 669\pi + i\sin 669\pi = \cos(668\pi+\pi)+i\sin(668\pi+\pi)$$
$$= \cos(\pi)+i\sin(\pi) = -1+i(0) = -1$$

- Calculons $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{741}$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{741} = \left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{741} = \cos\frac{741\pi}{4}+i\sin\frac{741\pi}{4}$$
$$= \cos\left(\frac{740\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{740\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}+i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

On rappelle la formule de Moivre : $(\boldsymbol{\cos\theta + i\sin\theta})^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{\cos n\theta + i\sin n\theta}$

- Pour $n=2$, on a $(\boldsymbol{\cos\theta + i\sin\theta})^2 = (\boldsymbol{\cos\theta})^2 + \boldsymbol{2i\sin\theta\cos\theta} - (\boldsymbol{\sin\theta})^2$
$$= \boldsymbol{\cos 2\theta + i\sin 2\theta}$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$\boldsymbol{\cos 2\theta = cos^2\theta - sin^2\theta}$$

$$\boldsymbol{sin\, 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta}$$

- Pour $n=3$, on a
- $(\boldsymbol{\cos\theta + i\sin\theta})^3 = \boldsymbol{cos^3\theta + 3icos^2\theta sin\,\theta - 3\cos\theta sin^2\theta - isin^3\theta}$
$$= \boldsymbol{cos^3\theta - 3\cos\theta sin^2\theta + i(3cos^2\theta sin\,\theta - sin^3\theta)}$$
$$= \boldsymbol{\cos 3\theta + i\sin 3\theta}$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$\boldsymbol{\cos 3\theta = cos^3\theta - 3\cos\theta sin^2\theta}$$

$$\boldsymbol{sin\,3\theta = 3cos^2\theta sin\,\theta - sin^3\theta}$$

6) Formules d'EULER

En utilisant la notation exponentielle, on obtient sans peine les relations :

$$\begin{cases} \boldsymbol{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta} \\ \boldsymbol{e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\,cos\,\theta} \qquad \boldsymbol{et} \qquad \boldsymbol{e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2\,i\,sin\,\theta}$$

Et on déduit les formules **d'EULER**. : $\boldsymbol{cos\,\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}}$ $\boldsymbol{sin\,\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}}$

Ces formules servent à la linéarisation des polynômes trigonométriques. Pour tout nombre réel θ et pour tout entier relatif n, on a :

$$\boldsymbol{cos\,n\theta = \frac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2}} \qquad \boldsymbol{sin\,n\theta = \frac{e^{in\theta}-e^{-in\theta}}{2i}}$$

7) Linéarisation

Linéariser l'écriture $cos^n x$, $(n \in \mathbb{N})$ c'est l'exprimer en fonction de $\cos px$ et $\cos qx$ où $(p \in \mathbb{Z})$ et $(q \in \mathbb{Z})$. Linéariser l'écriture $sin^n x$, $(n \in \mathbb{N})$ c'est l'exprimer en fonction de $\cos px$ et $\sin qx$ où $(p \in \mathbb{Z})$ et $(q \in \mathbb{Z})$. La linéarisation peut utiliser les formules **d'EULER**.

Exemple :

Linéarisons l'écriture $cos^5 x$

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \Rightarrow cos^5 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^5 = \frac{1}{2^5}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^5$$

$$= \frac{1}{2^5}\sum_{k=0}^{5} C_5^k \left(e^{ix}\right)^{5-k}\left(e^{-ix}\right)^k$$

$$= \frac{1}{32}\left(e^{i5x} + 5e^{i4x}e^{-ix} + 10e^{i3x}e^{-i2x} + 10e^{i2x}e^{-i3x} + 5e^{ix}e^{-i4x} + e^{-i5x}\right)$$

$$= \frac{1}{32}\left[\left(e^{i5x} + e^{-i5x} + 5e^{i3x} + 10e^{ix} + 10e^{-ix} + 5e^{-i3x}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{32}\left[\left(e^{i5x} + e^{-i5x} + 5e^{i3x} + 5e^{-i3x} + 10e^{ix} + 10e^{-ix}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{32}\left[\left(e^{i5x} + e^{-i5x}\right) + 5\left(e^{i3x} + e^{-i3x}\right) + 10\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{32}\left[(2cos\,5x) + 5(2cos\,3x) + 10(2cos\,x)\right]$$

$$= \frac{1}{32}\left[(2cos\,5x + 10cos\,3x + 20cos\,x)\right]$$

$$= \frac{1}{16}cos\,5x + \frac{5}{16}cos\,3x + \frac{5}{8}cos\,x$$

$$cos^5x = \frac{1}{16}\cos 5x + \frac{5}{16}\cos 3x + \frac{5}{8}\cos x$$

Dans certains cas les formules trigonométriques peuvent permettre d'éviter les formules **d'EULER**.

Exemple :

Linéarisons l'écriture cos^4x

$$cos^2x = \frac{1+\cos 2x}{2} \quad et \quad sin^2x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$cos^4x = (cos^2x)^2$$

$$= \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2^2}(1+\cos 2x)^2$$

$$= \frac{1}{4}(1+2\cos 2x + cos^2 2x)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}cos^2 2x$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$$

$$= \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$$

Il sera souvent utile de passer d'une écriture de la forme $cos^n\theta$ à une écriture de la forme $f(\cos p\theta)$. Par exemple

$$cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} \quad et \quad sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

Ce genre d'écriture étant utile pour la résolution des équations trigonométriques et plus tard pour le calcul des primitives, la question est comment est ce qu'on le fait. La réponse se trouve dans la formule d'Euler.

Exemple :

- $cos^2\theta = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(e^{i\theta}\right)^2 + 2e^{i\theta}e^{-i\theta} + \left(e^{-i\theta}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{i2\theta} + e^{-i2\theta} + 2\right)$$

$$= \frac{1}{4}(2\cos 2\theta + 2)$$

$$= \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{2}$$

- $sin^3\theta = \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3$

$$= \left(\frac{1}{2i}\right)^3 \left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)^3$$

$$= -\frac{1}{8i}\left[\left(e^{i\theta}\right)^3 - 3e^{i2\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-i2\theta} - \left(e^{-i\theta}\right)^3\right]$$

$$= -\frac{1}{8i}\left(e^{i3\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-i3\theta}\right)$$

$$= -\frac{1}{8i}\left[\left(e^{i3\theta} - e^{-i3\theta}\right) - 3\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{8i}[(2i\sin 3\theta) - 3(2i\sin\theta)]$$

$$= -\frac{1}{4}\sin 3\theta + \frac{3}{4}\sin\theta$$

Cette opération s'appelle la linéarisation.

Proposition : **(transformation d'un produit en une somme)**

Soit x et y deux nombres réels :

- $\boldsymbol{cos\, x\, cos\, y = \frac{1}{2}[cos(x+y) + cos(x-y)]}$

- $\boldsymbol{sin\,x\,sin\,y = \frac{-1}{2}[cos(x+y) - cos(x-y)]}$
- $\boldsymbol{sin\,x\,cos\,y = \frac{1}{2}[sin(x+y) + sin(x-y)]}$
- $\boldsymbol{cos\,x\,sin\,y = \frac{1}{2}[sin(x+y) - sin(x-y)]}$

Proposition : (transformation d'une somme en un produit)

Soit p et q deux nombres réels :

- $\boldsymbol{\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)}$
- $\boldsymbol{\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)}$
- $\boldsymbol{\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)}$
- $\boldsymbol{\sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)}$

Correction de la situation problème :

On pourra le faire sous forme d'exercices avec les apprenants.

EXERCICES D'APPLICATION :

Le plan complexe P est rapporté à un repere orthonormal $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$. On considère dans P les points $A, B\ et\ C$ d'affixes respectives $z_A = 1 + i\sqrt{3}$; $z_B = -1 - i$; $z_C = -(2+\sqrt{3}) + i$

1) Calculer le module et un argument du nombre complexe $w = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$
2) En déduire la nature du triangle ABC.
3) Écrire le nombre complexe $\frac{z_A}{z_B}$ sous forme algébrique.
4) Écrire les nombres z_A et z_B sous forme trigonométrique. En déduire la forme trigonométrique de $\frac{z_A}{z_B}$
5) À l'aide des deux questions précédentes donner les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Leçon 5 : ÉQUATIONS DU SECOND DÉGRÉ DANS $\mathbb{C}$
Durée : 100 minutes

MOTIVATION :

Dans cette leçon il s'agira de résoudre des équations à racine complexe.

PRE-REQUIS :

- Maitriser toutes les opérations dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
- Maitriser la table de PASCAL et le binôme de NEWTON.

COMPETENCES A ACQUERIR PAR LES ELEVES :

- Déterminer les racines carrées d'un nombre complexe non nul.
- Résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$.

SITUATION PROBLEME :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : x^2 + x + 1 = 0$.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 + (1 - 3i)z - 2(7 - i) = 0$.

1) Trouver les racines carrées du nombre complexe $48 - 14i$.
2) Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$. On donnera les solutions z_1 et z_2 sous forme algébrique telles que $Re(z_2) < 0$.

RESUME:

1) **Équations dans $\mathbb{C}$**

   a) **Racine $n-$ième d'un nombre complexe $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$**

   $n \in \mathbb{N}\backslash\{0; 1; 2\}$

C'est un nombre complexe $u = \varphi(\cos\theta + i\sin\theta)$ vérifiant $u^n = z$

Soit $u^n = z \Rightarrow [\varphi(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

$$\Rightarrow \varphi^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi^n = r \\ n\theta = \alpha + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = \sqrt[n]{r} \\ \theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases} \qquad k \in \{0; 1; 2; 3 \dots ; n-1\}$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{i}\,\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\theta}) = [\boldsymbol{\varphi}\,;\boldsymbol{\theta}] = \left[\sqrt[n]{r}\,;\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{n}} + \frac{\mathbf{2k\pi}}{\mathbf{n}}\right]$$

$$= \sqrt[n]{r}\left[\boldsymbol{cos}\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{n}} + \frac{\mathbf{2k\pi}}{\mathbf{n}}\right) + \boldsymbol{isin}\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{n}} + \frac{\mathbf{2k\pi}}{\mathbf{n}}\right)\right]$$

Un nombre complexe admet n racines $n - ième$ de même module.

Exemple :

Déterminer les racines $4 - ième$ de $z = 1 + i\sqrt{3}$

$$|\boldsymbol{z}| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\beta = \arg(z) \qquad \cos\beta = \frac{1}{2} \quad et \quad \sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \beta = \frac{\pi}{3}$$

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$u = \varphi(\cos\theta + i\sin\theta)$ est racine $4 - ième$ de z si et seulement si

$$u^4 = z \Rightarrow [\varphi(\cos\theta + i\sin\theta)]^4 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \varphi^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi^4 = 2 \\ 4\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi = \sqrt[4]{2} \\ \theta = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \end{cases}$$

$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}}$
0	$\frac{\pi}{12}$
1	$\frac{7\pi}{12}$
2	$\frac{13\pi}{12}$
3	$\frac{19\pi}{12}$

$$\boldsymbol{u_0} = \left[\sqrt[4]{\mathbf{2}}\,;\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{12}}\right] \qquad \boldsymbol{u_1} = \left[\sqrt[4]{\mathbf{2}}\,;\frac{\mathbf{7}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{12}}\right] \qquad \boldsymbol{u_2} = \left[\sqrt[4]{\mathbf{2}}\,;\frac{\mathbf{13}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{12}}\right] \qquad \boldsymbol{u_3} = \left[\sqrt[4]{\mathbf{2}}\,;\frac{\mathbf{19}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{12}}\right]$$

b) **Racine carrée d'un nombre complexe $z = a + bi$**

C'est un nombre complexe $u = x + iy$ qui vérifie : $\begin{cases} u^2 = z \\ |u|^2 = |z| \end{cases}$

$$\begin{cases} u^2 = z \\ |u|^2 = |z| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+iy)^2 = a + bi \\ (\sqrt{x^2+y^2})^2 = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2xiy - y^2 = a + bi \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases}$$

On obtient le système suivant : $\begin{cases} x^2 - y^2 = a & (E_1) \\ x^2 + y^2 = \delta & (E_2) \\ 2xy = b & (E_3) \end{cases}$ **avec** $\delta = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$

On détermine u en résolvant le système ci-haut.

$$(E_1) + (E_2) \Rightarrow 2x^2 = a + \delta \Rightarrow x^2 = \frac{a+\delta}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{a+\delta}{2}} = \pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$

$$(E_2) - (E_1) \Rightarrow 2y^2 = \delta - a \Rightarrow y^2 = \frac{\delta - a}{2} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{\delta-a}{2}} = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$

- Pour $b < 0$, x et y sont de signes contraires.

$$u_1 = x + iy = \sqrt{\frac{a+\delta}{2}} - i\sqrt{\frac{\delta-a}{2}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$

$$u_2 = x + iy = -\sqrt{\frac{a+\delta}{2}} + i\sqrt{\frac{\delta-a}{2}} = -\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$

- Pour $b > 0$, x et y ont le même signe.

$$u_1 = x + iy = \sqrt{\frac{a+\delta}{2}} + i\sqrt{\frac{\delta-a}{2}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$

$$u_2 = x + iy = -\sqrt{\frac{a+\delta}{2}} - i\sqrt{\frac{\delta-a}{2}} = -\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$

Exemple :

Trouvons les racines carrées du nombre complexe $z = -5 + 12i$

Soit $u = x + iy$ cette racine carrée

$$|z| = \sqrt{(-5)^2 + (12)^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

$$\begin{cases} u^2 = -5 + 12i \\ |u|^2 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x + iy)^2 = -5 + 12i \\ (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2xiy - y^2 = -5 + 12i \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$$

On obtient le système suivant : $\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 & (E_1) \\ x^2 + y^2 = 13 & (E_2) \\ 2xy = 12 & (E_3) \end{cases}$

Après résolution on trouve $x = \pm 2$ et $y = \pm 3$ comme $xy = 6 > 0$ alors x et y sont de même signe et on a

$$u_1 = 2 + 3i$$

$$u_2 = -2 - 3\,i$$

2) Équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$ dans ℂ

Pour la résoudre, on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta = 0$ les deux solutions sont confondues et on a $z = -\frac{b}{2a}$
- Si $\Delta \neq 0$ les deux solutions sont distinctes et on a $z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Exemple : **Résoudre dans ℂ les équations**

(E_1) : $3z^2 - z + 2 = 0$ (E_2) : $z^2 - (2i - 1)z - (1 + i) = 0$

Solution : (E_1) : $3z^2 - z + 2 = 0$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 3 \times 2 = -23 = 23i^2 = \left(i\sqrt{23}\right)^2$$

$$z_1 = \frac{-(-1) - i\sqrt{23}}{6} = \frac{1 - i\sqrt{23}}{6} \qquad z_2 = \frac{-(-1) + i\sqrt{23}}{6} = \frac{1 + i\sqrt{23}}{6}$$

$$S = \left\{\frac{1 - i\sqrt{23}}{6} \, ; \, \frac{1 + i\sqrt{23}}{6}\right\}$$

$$(E_2) : \quad z^2 - (2i - 1)z - (1 + i) = 0$$

$$\Delta = [-(2i - 1)]^2 - 4 \times -(1 + i)$$

$$= [-(2i - 1)]^2 + 4(1 + i)$$

$$= (2i - 1)^2 + 4(1 + i)$$

$$= 4i^2 - 4i + 1 + 4 + 4i$$

$$= -4 - 4i + 5 + 4i$$

$$= 1$$

$$z_1 = \frac{-[-(2i-1)] - 1}{2} = \frac{2i-2}{2} = -1 + i \qquad z_2 = \frac{-[-(2i-1)] + 1}{2} = \frac{2i}{2} = i$$

$$S = \{-1 + i \ ; \ i\}$$

Correction de la situation problème :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) :\ x^2 + x + 1 = 0$.

$$\Delta = (1)^2 - 4(1)(1) = 1 - 4 = -3 = 3i^2 = \left(i\sqrt{3}\right)^2$$

$$x_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \qquad x_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

EXERCICES D'APPLICATION :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) :\ z^2 + 2(1 - \cos\theta)z + 2(1 - \cos\theta) = 0$ où θ est un paramètre réel appartenant à l'intervalle $]0\,;\pi]$.

1) Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$. On désignera les solutions par z_1 et z_2 .
2) Déterminer en fonction de θ, le module et un argument de chacun des nombres complexes z_1 et z_2.

(on rappelle que, pour tout réel α , on a : $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ et $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$)

MODULE 26	ORGANISATION ET GESTION DES DONNEES

CHAPITRE 3 : THEORIES DES GRAPHES

INTERET : La théorie des graphes est utilisée dans plusieurs discipline ou branches de la vie courante tel que : la recherche mathématique, le génie électrique, la programmation, la gestion des réseaux, l'administration d'affaires, la sociologie, les sciences économiques, la vente, les communications. En particulier, beaucoup de problèmes peuvent être modélisées avec des chemins constitués par un déplacement le long des arêtes d'un certain graphe. Par exemple, des problèmes de planification efficace des routes pour la distribution du courrier, collecte d'ordures et diagnostic dans les réseaux.

MOTIVATION : De nombreuses situations dans la vie courante telle que : construction des routes et ponts, la gestion des emploi de temps dans un établissement, la planification des examens dans un pays, l'optimisation des trajets suivant un ensemble de trajets nécessitent la maitrise des notions de graphes pour rendre ces taches plus rapide à étudier.

LECON 1 : Chaines et cycles dans un graphe
Durée: 50 minutes

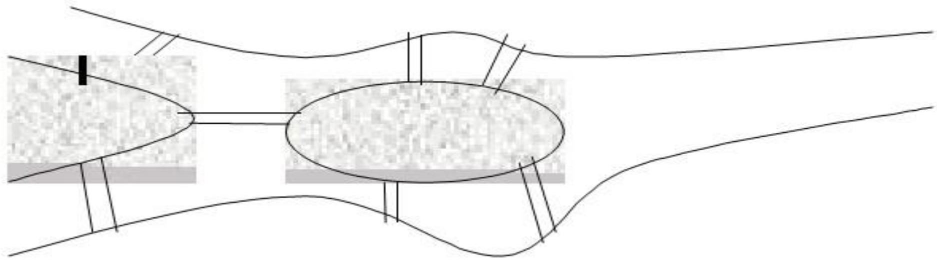
OBJECTIFS PEDQGOGIQUES

L'élève doit être capable de :

- Définir et déterminer une chaine ou un cycle dans un graphe quelconque donné.
- Déterminer la longueur d'une chaine d'un graphe.
- Définir et déterminer une chaine eulérienne ou un cycle eulérien dans un graphe.
- Justifier qu'une chaine est un cycle.

SITUATION PROBLEME

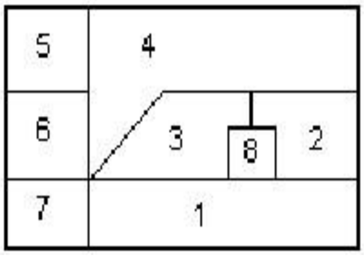
La ville de Königsberg (Presse orientale) comptait 7ponts, disposés selon la figure ci-dessous.



Vous élève de Tle D ayant fait une visite dans cette ville, vous constatez que les habitants sont confrontés à une fortement préoccupation de savoir s’il est possible de trouver un circuit qui emprunte une fois et une seule chacun des sept ponts de la ville ? Aidez ces habitants à résoudre ce problème.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

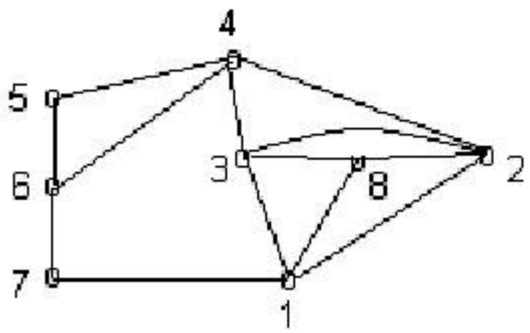
Huit pays sont représentés ci-dessous avec leur frontière (deux pays dont les frontières n'ont qu'un nombre fini de points ne sont pas considérés comme voisins).



1. Représentez cette situation par un graphe d'ordre 8 dont les sommets sont les pays et les arêtes les frontières.
2. Faire un tableau faisant ressortir le degré de chaque sommet puis déduire le nombre de sommets de degrés impair.
3. Déduire de la question 2 l'existence d'une chaine eulérienne.
4. De tous ce qui précède, est-il possible de partir d'un pays de franchir chaque frontière une fois et une seule et de terminer en un autre pays ?

SOLUTION

1. Représentation de la situation par un graphe d'ordre 8.



2. Tableau faisant ressortir le degré de chaque sommet.

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	4	4	4	4	2	3	2	3

Nous avons exactement deux sommets de degrés impairs (les sommets 6 et 8).

3. Comme nous avons exactement deux sommets de degrés impairs, graphe admet une chaine eulérienne.
4. De la question 4 on conclure qu'il est possible de partir d'un pays, de franchir chaque frontière une fois et une seule et de terminer en un autre pays.

RESUME :

1. Chaines et cycles dans un graphe.

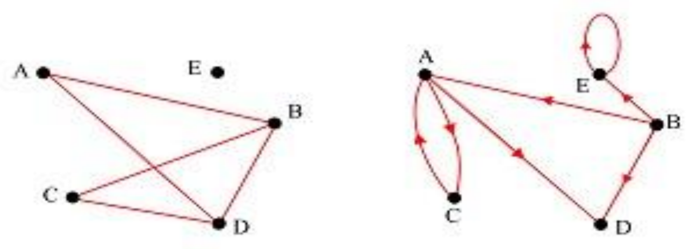
1.1. Chaines dans un graphe

a. Définitions :

- Une chaine ou chemin, dans un graphe non orienté est une suite d'arêtes mises bout à bout reliant deux sommets du graphe.
- Une chaine orientée, dans un graphe orienté, est une suite d'arêtes orientées telles que l'extrémité terminale de l'une est l'extrémité initiale de l'autre.

Exemple1:

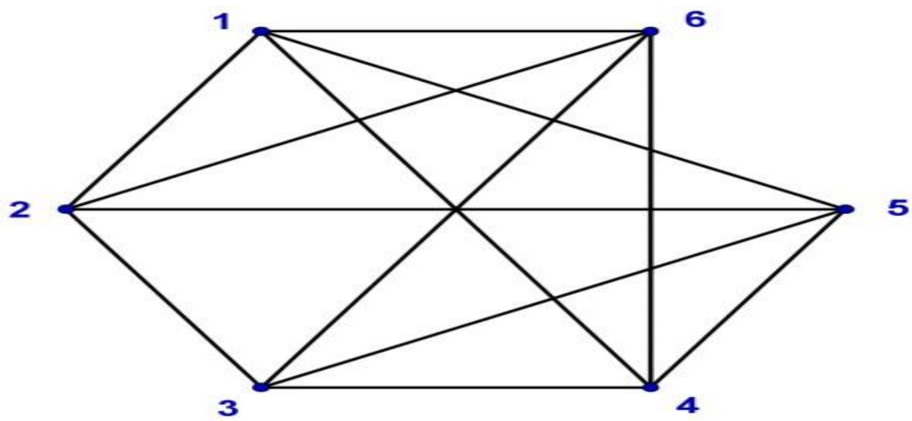
Soit les deux graphes suivants :



Graphe 1 Graphe 2

Dans le graphe 1, précédent $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{C})$ est une chaine. Et une chaine orientée du graphe 2 est
$(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{D})$.

Exemple 2:
Considérons le graphe suivant.



Exemples de chaines de ce graphe : 123 ; 1264 ; 121 ; 1263261.

- Une chaine est dite **fermée** lorsque l'origine et l'extrémité de la chaine sont confondues.

Exemple 3 : Dans le graphe de l'exemple 2 les chaines 121 et 1263261 sont des chaines fermées.

- Une chaine est dite **eulérienne** si elle est composée de toutes les arêtes du graphe prises une seule fois.

Exemple 4 : Dans le graphe 1 de l'exemple 1, (B, C, D, B, A, D) est une chaine eulérienne.

NB : Un graphe admet un chemin ou une chaine eulérienne s'il contient exactement zéro ou deux sommets de degré impair.

b. Longueur d'une chaine.

La longueur d'une chaine est le nombre d'arêtes qui la composent. Pour le graphe de l'exemple 2, La chaine 123 a pour longueur : 2.

La chaine 1264 a pour longueur : 3

La chaine 121 a pour longueur : 2

La chaine 1263261 a pour longueur : 6

1.2. Cycle dans un graphe.

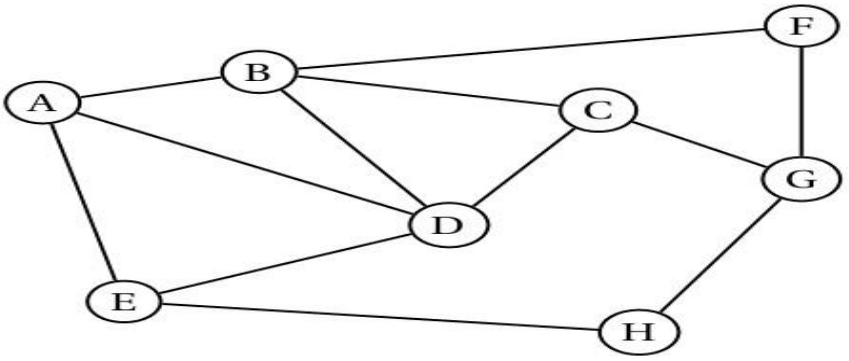
- **Un cycle** est une chaine fermée dont toutes les arêtes sont distinctes.
  Exemple 5 : les deux chaines fermées données à l'exemple 3 ne sont pas des cycles, par contre 164621 est un cycle.
- Un cycle eulérien est une chaine eulérienne dont les extrémités coïncident.

EXERCICE D'APPLICATION

APPLICATION 1

Une compagnie aérienne utilise huit aéroports que l'on nomme A, B, C, D, E, F, G et H. entre certains de ces aéroports, la compagnie propose des vols dans les deux sens. Cette situation est représentée par le graphe G, ci-dessous, dans lequel :

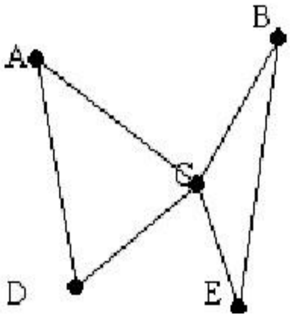
- Les sommets représentent les aéroports.
- Les arêtes représentent les liaisons assurées dans les deux sens par la compagnie.

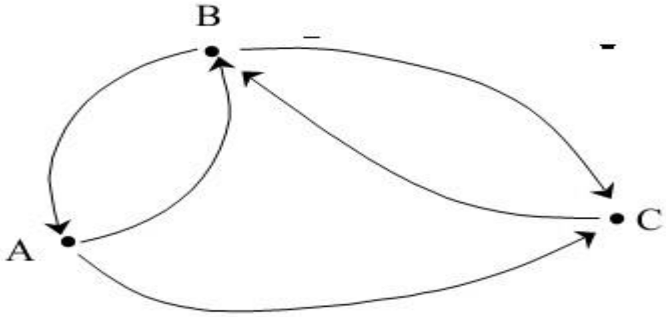


1. a) Déterminer, en justifiant, si le graphe G est complet.
2. Faite ressortir dans ce graphe deux chaines, un cycle et donner les longueurs de ces chaines.

4. Déterminer en justifiant, si le graphe G admet une chaine eulérienne, un cycle eulérien. Si c'est le cas donner une telle chaine et un telle cycle.

APPLICATION 2





1. Le chasse neige doit déblayer les 6 routes qui relient 5 villages A, B, C, D et E. **(première graphe)** Peut-on trouver des itinéraires qui permettent de parcourir une et une seule fois chaque route ? a) En partant de E et en terminant par E.

b) En partant de C et en terminant à D
c) En partant de A et en terminant à A

2. Considérons le deuxième graphe de sommets A, B et C. combien y'a-t-il de chaines de longueur 4 entre A et B ? B et A ? B et B

LEÇON 2 : Sous-graphes et graphes connexes

Durée : 50 minutes

OBJECTIFS PEDQGOGIQUES

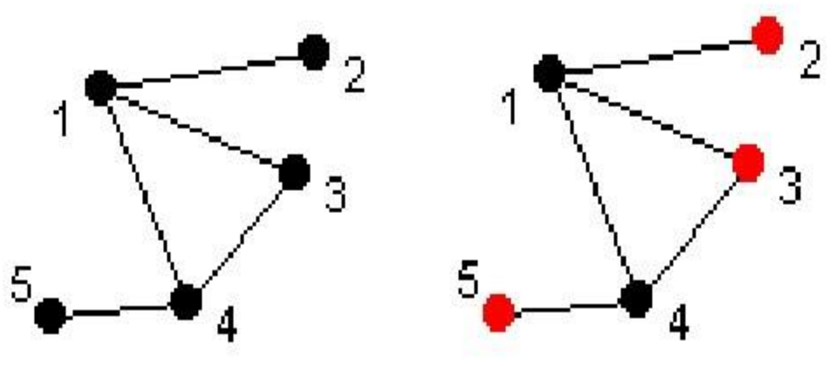
l'élève doit être capable de :

- Définir sous-graphe et graphe connexe
- Pouvoir faire ressortir un sous-graphe d'un graphe quelconque suivant certaines conditions données.
- Reconnaitre un graphe connexe.
- Faire la différence entre un sous-graphe et un graphe partiel d'un graphe donné.

SITUATION PROBLEME

Une chaine de cinq magasins décide d'ouvrir le maximum de magasins en nocturne avec les contraintes suivantes : les deux premiers magasins de peuvent pas être ouvert ensemble en nocturne ; il en est de même pour les deux dernier ; au plus un seul magasin peut être ouvert en nocturne parmi les magasins 1, 3, 4. Trouver un état qui maximise le nombre de magasins ouverts en nocturne, tout en respectant les contraintes.

SOLUTION



Il y'a qu'un seul sous –graphe à trois éléments sans arêtes ; tous les sous graphes d'ordre 4 ou d'ordre 5 ont des arêtes.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

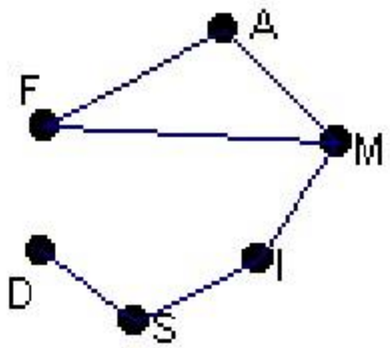
On veut organiser un examen dans une école d'ingénierie ; il y'a 6 options : Français(F), Anglais(A), Mécanique(M), Dessin industriel(D), Internet(I), Sport(S), les profils des candidats sont les suivant : F, A,

M ; D, S ; I, S ; I, M.

1. Modéliser cette situation à l'aide d'un graphe.
2. Déterminer le nombre de sous graphe d'ordre 3 n'ayant pas d'arêtes.
3. Déduire le nombre maximal d'épreuves qu'on peut mettre en parallèle.

SOLUTION

1) Modélisation de cette situation a l'aide d'un graphe.



2) Tous sous graphes de plus de trois sommets comportent des arêtes ; nous avons donc ici deux sous graphes d'ordre 3 ne comportant pas d'arêtes (de sommets respectivement A, D, I et F, D, I).
3) Le nombre maximal d'épreuves en parelle est donc 3.

RESUME

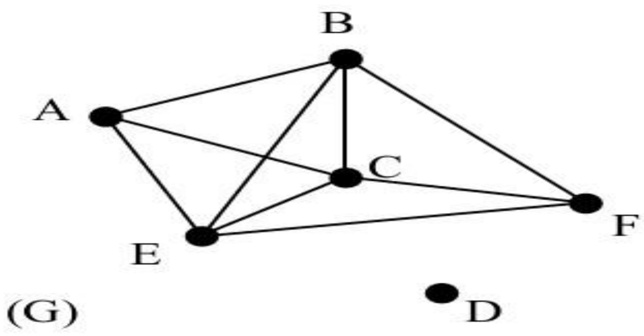
1. **Sous graphe d'un graphe.** Soit G un graphe,

➢ Un sous graphe d'un graphe G est un graphe composé de certains sommets de G et de toutes les arêtes qui relient ces sommets.

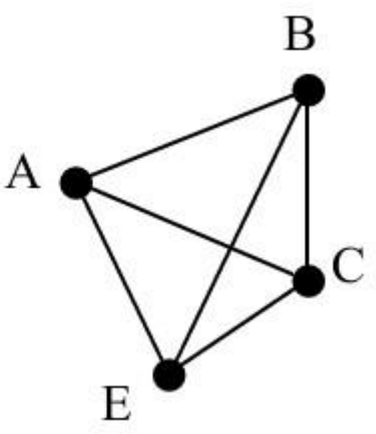
Exemple 1:

- Un sous graphe d'un graphe G est dit **complet** lorsque ses sommets sont deux à deux adjacents. Les sous graphes complets sont encore appelés des cliques.

Exemple 2:
Soit le graphe G ci-dessous :

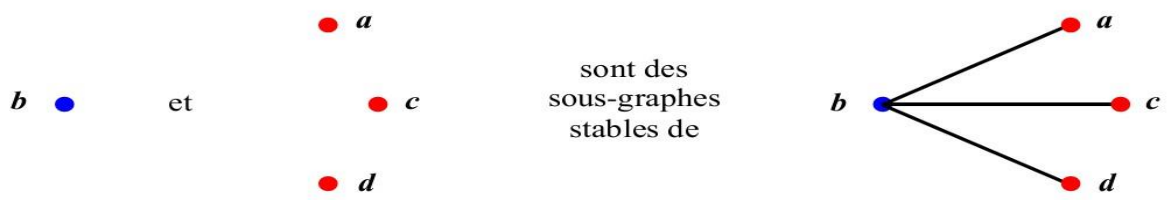


Le graphe ci-dessous est un sous graphe complet de G.



- Un sous graphe est dit **stable** lorsqu'il ne comporte aucune arête, autrement dit si deux sommets quelconques ne sont pas adjacents.

  Exemple 3 :



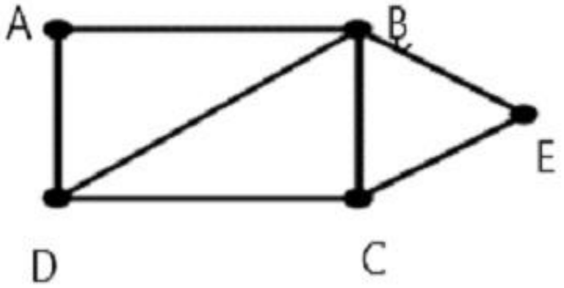
2. Graphes partiels et sous graphes partiels.

- **Un graphe partiel** est un sous graphe ayant le même ensemble de sommets que le graphe qui le contient.

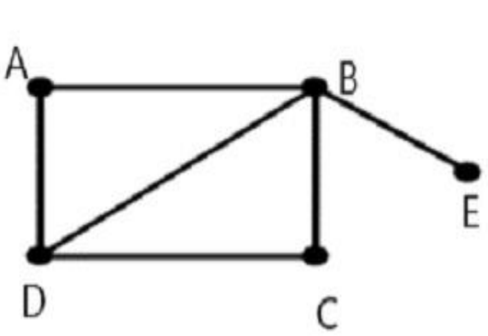
  Autrement dit on garde tous les sommets du graphe principal et on l'enlève quelques arêtes pour obtenir un graphe partiel.

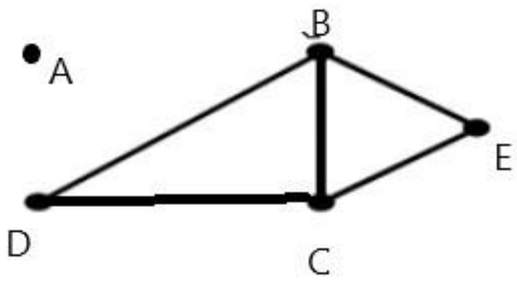
  Exemple 4 :

  Soit le graphe suivant :



Comme exemple de graphes partiel de ce graphe nous avons les graphes ci-dessous :





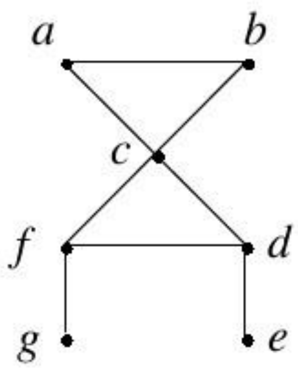
- **Un sous graphe partiel** est un graphe un graphe partiel d'un sous graphe.

3. Graphes connexe.

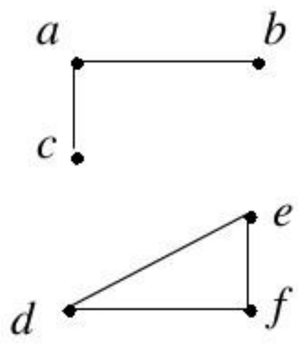
3.1 Connexité dans un graphe non orienté

- Un graphe non orienté est **connexe** s'il y a une chaine entre n'importe quelle paire de sommets distincts du graphe.

Exemple 5 :



G



H

Le graphe G est connexe puisqu'il existe une chaine entre n'importe quelle paire des sommets distincts. Le graphe H n'est pas connexe ; par exemple, il y'a pas de chaine entre les sommets a et d.

- Un graphe qui n'est pas connexe est l'union de deux ou plusieurs sous graphes connexes, chaque paire de ceux-ci n'ayant pas de sommet en commun. Les sous graphes connexes sont les composantes connexes du graphe.

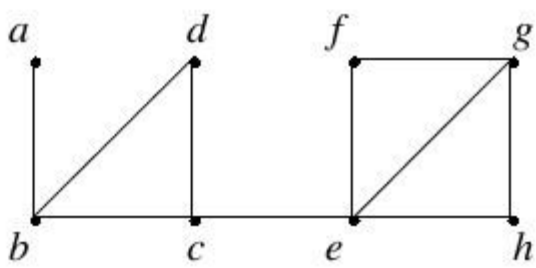
Exemple 6 :

Dans l'exemple précèdent, le graphe H contient deux composantes connexes. H1 formé des sommets a, b, c et H2 formé des sommets d, e et f.

- Le retrait d'un sommet et de toutes les arêtes incidentes à ce sommet conduit à former un sous-graphe avec plus de composantes connexes que dans le graphe initial. Ces sommets sont appelés points de coupure. Le retrait d'un point coupure à partir d'un graphe connexe produit un sous-graphe qui n'est pas connexe. De façon similaire, une arête dont le retrait produit un graphe avec plus de composantes connexes que dans le graphe initial est appelée un séparateur.

Exemple 7 :

Trouvez les points de coupure et les séparateurs dans le graphe illustré à la figure ci-dessous.



Les points de coupure sont b, c et e. Le retrait de l'un de ces sommets et ses arêtes adjacentes sectionne le graphe. Et dont les séparateurs sont : $\{a; b\}$ et $\{c; e\}$.

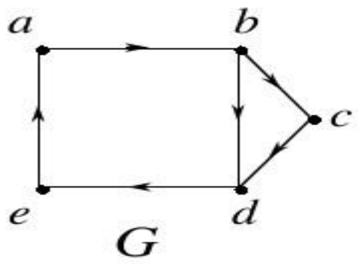
3.2. Connexité dans un graphe orienté

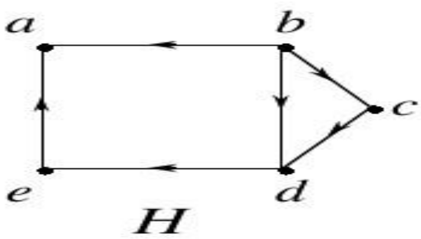
- Un graphe orienté est **fortement connexe** s'il existe un chemin du sommet a au sommet b et du sommet b au sommet a, quels que soient les sommets représentés par$a$ et b dans le graphe.

- Un graphe orienté est **faiblement connexe** s'il y a une chaîne entre n'importe quelle paire de sommets dans le graphe si l'on ne considère plus l'orientation des arcs.

Exemple 8 :

Les graphes G et H présentés ci-dessous sont-ils fortement connexes ? Sont-ils faiblement connexes ?





. Le graphe G est fortement connexe parce qu'il existe un chemin entre n'importe quelle paire de sommets dans ce graphe orienté. Par conséquent, G est également faiblement connexe. Le graphe H n'est pas fortement connexe.

3.3. Théorème d'Euler :

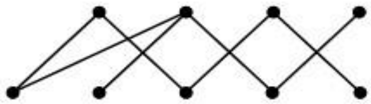
(i) Un graphe connexe admet une chaine eulérienne entre les sommets A et B si et seulement si A et B sont les seuls sommets de degré impair.

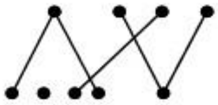
(ii) Un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si tous les sommets sont de degré pair.

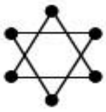
EXERCICES D'APPLICATIONS

Application 1

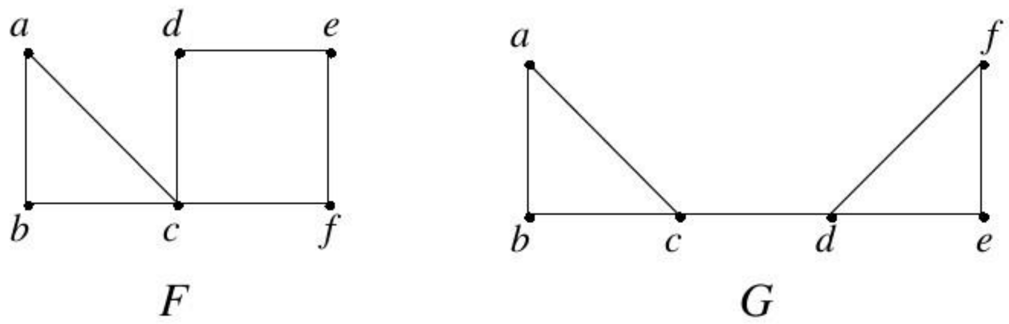
1. Dans les 3 graphes suivants, déterminer le nombre de composantes connexes :





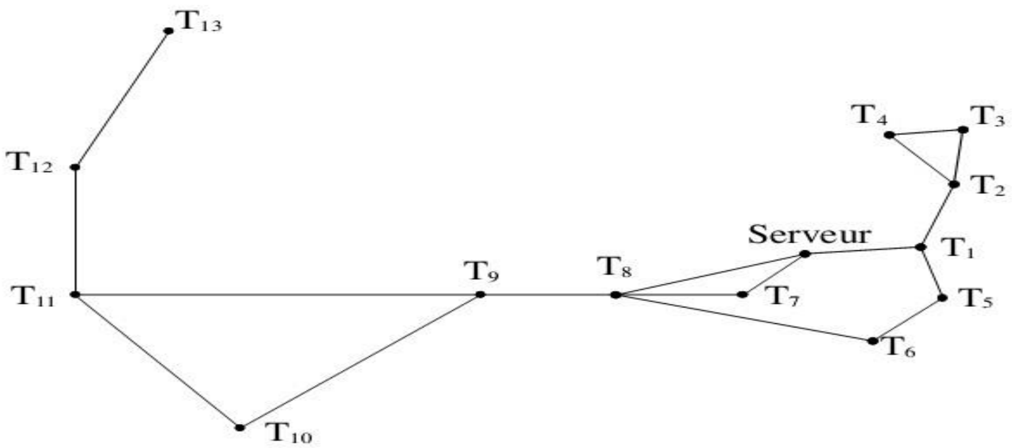


2. a) Dans les 2 graphes suivants, trouver tous les points de coupure.
   b) Trouver tous les séparateurs des graphes précédents.



Application 2:

Un réseau de communication informatique (Serveur – Terminaux) doit être sécurisé par un cycle de secours en cas de défaillance de liens. Déterminer le nombre minimum de liens qui faut ajouter afin de pouvoir pallier à une rupture d'un lien initial quelconque dans le réseau. Préciser le/les liens qu'il s'agit ajouter.



Application 3:

1. a) Le graphe suivant est-il fortement connexe ?

b) Déterminer alors le nombre de composantes fortement connexes.

Application 4:

À Grapheville, on ne peut se déplacer qu'en métro. De la station "Centre" partent 7 lignes, de la station "Loin-loin" ne part qu'une seule ligne. De toutes les autres stations partent 4 lignes. Montrer qu'on peutse rendre en métro de "Centre" à "Loin-loin".

LEÇON 3 : Graphes pondérés
Durée : 100 minutes

OBJECTIFS PEDAGOGOGIQUES

L'élève doit être capable de :

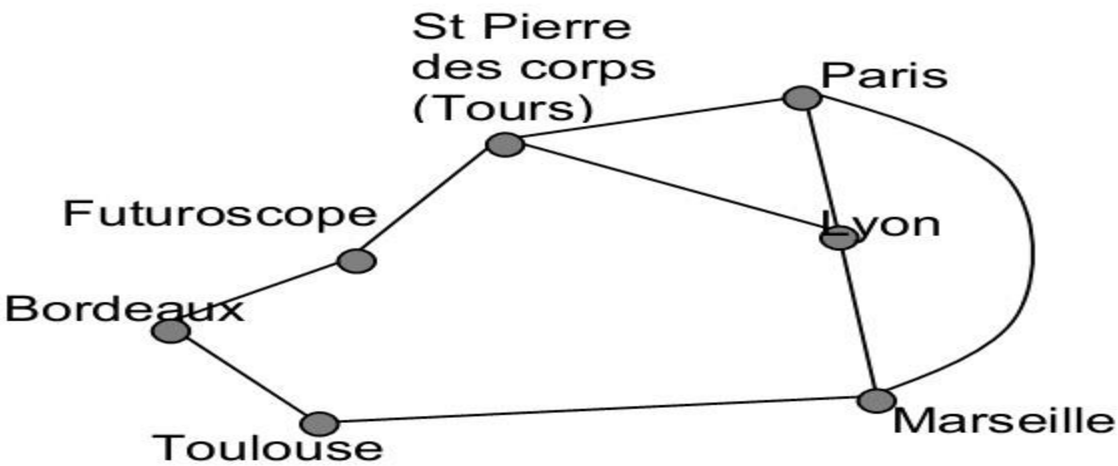
- Définir graphe pondéré, poids d'une arête, plus court chemin.
  - Reconnaitre un graphe pondéré.
- Déterminer le chemin le plus court entre deux sommets d'un graphe.

PREREQUIS

1. Définir chaine dans un graphe non orienté puis schématiser un graphe d'ordre 5 ou vous ferez ressortir au moins 3 chaines de ce graphe.

SITUATION PROBLEME

Un voyageur souhaite se rendre de Marseille au Futuroscope en train, d'une carte du réseau TGV, il a extrait le schéma ci-dessous.



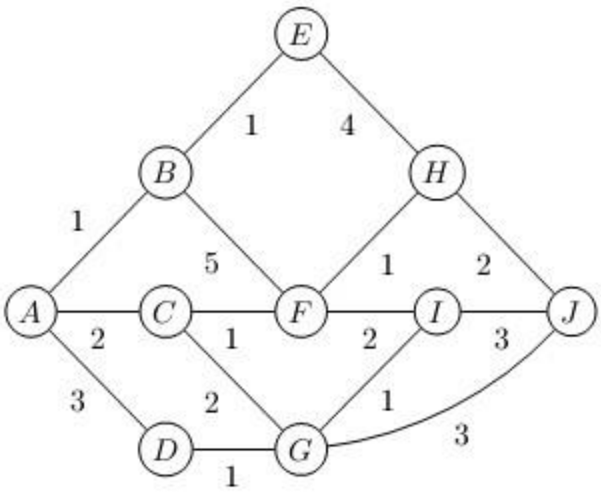
Les guides donnent par ailleurs les temps suivants :

Marseille – Lyon : 1h50	Lyon – Paris : 2h15	St Pierre des corps – Futuroscope : 30 '
Marseille – Paris :3h	Lyon – St Pierre des corps : 3h	Futuroscope - Bordeaux : 2h10
Marseille -Toulouse : 3h	Paris – St Pierre des corps : 1h	Toulouse – Bordeaux : 2h10

Quel trajet conseilleriez-vous à ce voyageur ? (on négligera dans cet exercice le temps de correspondance).

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

Un enfant voudrait se rendre chez sa tante Yasmine situé au sommet J du graphe donné ci-dessous :



L'enfant se trouvant au sommet A du graphe ci-dessus. Afin d'éviter de beaucoup marcher il aimerait emprunter un chemin court qui le mènera très rapidement chez sa tante.

NB : les nombres sur le graphe étant les distances en Km reliant deux sommets reliés par une arête. Qui sont aussi le poids de chaque arête.

1. Première méthode :
   a. Déterminer toutes les chaines ou chemins de longueur inferieur ou égale à 5 quittant de chez le petit garçon pour jusqu'au domicile de sa tante.
   b. Evaluer le poids des différentes chaines déterminés à la question 1.a
   c. Déduire donc le chemin le plus propice pour cet enfant pour l'éviter a beaucoup s'épuisé.
2. Deuxième méthode :

   On se propose par la suite de retrouver le chemin le plus propice de la question 1.c a emprunté par l'enfant pour se rendre chez sa tante. Pour cela on définir un algorithme qui nous permettra de retrouver ce résultat.

Principe de l'algorithme :

- Placez les noms des sommets sur la première ligne d'un tableau (sommet de départ s_1 en premier), avec une dernière colonne pour écrire les chemins les plus courts.
- Sur la deuxième ligne, écrire la chaine $s_1(0)$ dans la colonne de s_1 puis cocher cette chaine dans le tableau et cocher la colonne du tableau de cette chaine.
- Sur la troisième ligne, pour chaque sommet s_i, adjacent à s_1 dans une colonne non cochée, écrire la chaine $s_1(p)$, p étant est le point de la chaine $s_1 s_i$.

  Écrire dans la dernière colonne la (les) chaîne la plus courte non cochée avec son poids $s_1(p)$, puis cocher cette chaîne dans le tableau et cocher la colonne de cette chaîne.
- (*) ligne suivante, pour chaque sommet s_i dans une colonne non cochée et adjacent au (aux) dernier(s)sommet(s) de la (les) chaîne(s) la (les) plus courte(s) précédente(s) (ici s_k),

  Écrire la chaîne $s_1 s_k(p)$ où p est le poids de la chaîne $s_1 s_k s_i$. écrire dans la dernière colonne la (les) chaîne(s) la (les) plus courte(s) parmi les chaînes non cochées des colonnes non cochées présentes dans le tableau avec son poids (ex: $s_1 s_k s_m(p)$), puis cocher cette chaîne dans le tableau et cocher la colonne de cette chaîne.. Lignes suivantes, et jusqu'à ce que toutes les colonnes soient cochées : on reprend (*) (à partir du (des) dernier(s) sommet(s) de la (les) chaîne(s) la (les) plus courte(s)précédente(s))

  NB : les chaines les plus courtes à partir de s_1 sont dans la dernière colonne ainsi que leurs poids.

  A partir de cet algorithme retrouver le résultat de la question 1.c.

SOLUTION

1. a. déterminons tous les chaines de longueur inferieur ou égale à 5 quittant de chez le petit garçon pour la maison de sa tante.
   Nous avons les chaines : ADGJ, ADGIJ, ABFIJ, ACFIJ, ACGJ,
   ACGIJ, ACFHJ, ABEHJ. b) déterminons le poids de chaque chaines

chaines	ADGJ	ADGIJ	ABFIJ	ACFIJ	ACGJ	ACGIJ	ACFHJ	ABEHJ
poids	7	8	11	8	7	9	6	8

   c) le chemin le plus propice pour cet enfant est le chemin ACFHJ.
2. Utilisons l'algorithme précèdent pour retrouver le résultat de la question 1.c.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	chaînes mini
A(0)										A(0)
×	AB(1)	AC(2)	AD(3)							AB(1)
×	×	×	×	ABE(2)	ABF(6)					AC(2) ABE(2)
×	×	×	×	×	ACF(3)	ACG(4)	ABEH(6)			ACF(3) AD(3)
×	×	×	×	×	×	ADG(4)	ACFH(4)	ACFI(5)		ADG(4) ACG(4) ACFH(4)
×	×	×	×	×	×	×	×	ACGI(5)	ACGJ(7)	
×	×	×	×	×	×	×	×	ADGI(5)	ADGJ(7)	
×	×	×	×	×	×	×	×	×	ACFHJ(6)	ACFI(5) ACGI(5) ADGI(5)
×	×	×	×	×	×	×	×	×	ACFIJ(8)	
×	×	×	×	×	×	×	×	×	ACGIJ(8)	
×	×	×	×	×	×	×	×	×	ADGIJ(8)	ACFHJ(6)

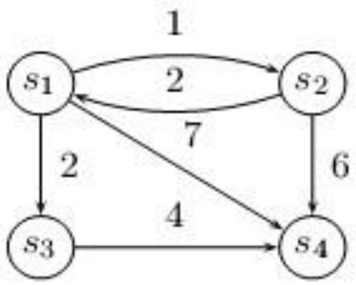
La chaîne la plus courte de A à J est donc ACFHJ avec un poids de 6. On conclure que ce résultat est en accord avec le résultat de la question 1.c

RESUME

1. Définitions

- **Un graphe** (orienté ou non) est dit pondéré lorsque ces arêtes sont affectées des nombres positifs.
- **Le poids d'une arête** est le nombre positifs qui lui est affecté.
- **Le poids d'un graphe** est la somme des poids de tous les arêtes constituant ce graphe.
- **Le poids d'une chaine** est la somme des poids arêtes qui la composent.
- **Une plus petite courte chaine** entre deux sommets donnés est une chaine de poids minimal parmi toutes les chaines reliant les deux sommets.

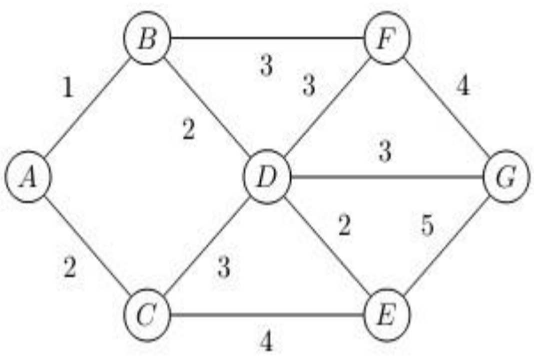
2. Exemples de graphes pondérés et son vocabulaire.



Le graphe ci-contre est un graphe pondéré orienté. L'arête s_2s_6 a pour poids 6.

La chaine $s_1s_2s_4$ a pour poids 1+6=7.

La plus courte chaine entre s_1 et s_4 est $s_1s_3s_4$ avec un poids de 6.



Le graphe ci-contre est un graphe de non orienté pondéré.

La chaine ACEG a pour poids 11.

Dans l'exemple précèdent de graphe orienté pondéré on n'a pu terminer le plus court chemin entre les sommets s_1 et s_4. Mais lorsque le graphe devient volumineux avec de nombres arêtes, cela devient très complexes d'où nous devons faires recourt à certains algorithmes pour la détermination de ce chemin le plus court entre deux sommet.
Comme différents algorithmes nous avons entre autre l'algorithme de FORD pour les graphes orientés sans cycles. L'algorithme de DIJKSTRA-MOORE pour les graphes pondéré des poids positifs.

Mais nous nous pencherons pour cette année sur l'étude du deuxième algorithme.

3. Détermination du plus court chemin entre deux sommets d'un graphe (algorithme de DIJKSTRAMOORE).

3.1. Définition

Algorithme de DIJKSTRA : algorithme de détermination d'une plus courte chaine d'un graphe pondéré entre deux sommets quelconque d'un graphe.

3.2. Principe de cet algorithme

- Si $s_1s_2s_3 \dots \dots s_p$ $(ec\ p\ entier\ naturel\ non\ nul)$ est un plus court chemin reliant s_1 à s_p alors pour tout entier i compris entre 1 $et\ p$, $s_1s_2s_3 \dots \dots s_i$ est le plus court chemin reliant s_1 à s_i. Donc on détermine de proche en proche les chemins minimaux reliant s_1 aux autres sommets jusqu'à s_p.
- Chaque itération de l'algorithme de DIJKSTRA permet de remplie une ligne d'un tableau dont la dernière ligne donnera un chemin minimal.

3.3. Algorithme de DIJKSTRA

Etape 1 : **initialisation**

- Dans la première ligne du tableau on écrit tous les sommets du graphe. (L'ordre des sommets est arbitraire. Ici on place d'abord le sommet initial et en dernier le sommet final entre eux les sommets sont placés par ordre alphabétique).
- Dans la deuxième ligne on écrit sous le point initial : 0, sous les autres sommets on écrit : ∞ (correspondant aux poids affectés aux sommets).

Etape 2 :

- Choisir parmi les sommets (non encore marqués) un sommet X de poids minimal (si plusieurs sommets ont le même poids minimal alors le choix parmi ces sommets est arbitraire).
- Dans la nouvelle ligne et dans la colonne X, on marque définitivement ce poids minimal et après cette

  case de la colonne on n'écrira plus rien (dans l'exemple que qu'on prendra on mettra les couleurs sur ces cases).

Etape 3:
Pour tous les sommets Y adjacents à X qui ne sont pas définitivement marqués, on calcule la somme σ du poids de X et de l'arête reliant X à Y.

- Si cette somme σ est strictement inférieure au poids de Y alors on écrit dans la case de la ligne de la colonne de Y comme poids la somme obtenu σ et on notera (X) □ Sinon, on écrit dans cette case le poids précèdent.

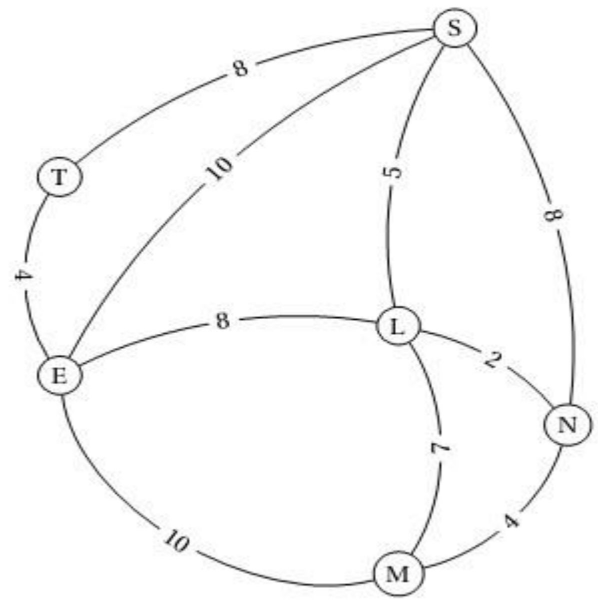
Etape 4:

- S'il reste des sommets non marqués définitivement alors on repart à l'étape 2.
- Sinon on passe à l'étape 5.

Etape 5:
On obtient le poids du plus court chemin dans la dernière ligne. Puis on détermine le plus court chemin obtenu.

3.4. Application de l'algorithme de DIJKSTRA sur un exemple.

Exemple : Dans l'exemple du graphe ci-dessous, on recherche le chemin le plus court menant de M à S. le poids de chaque arête représente le temps en minutes entre deux sommets.



Solution de l'exemple :

Initialisation :

On construit un tableau ayant pour colonnes chacun des sommets du graphe. On ajoute à gauche une colonne qui recensera les sommets choisis à chaque étape (cette colonne est facultative mais facilitera la compréhension de l'algorithme). Puisqu'on part du sommet M, on inscrit, sur la première ligne intitulée << départ>> $0(M)$ dans la colonne M et ∞ dans les autres colonnes.

Cela signifie qu'à ce stade, on peut rejoindre M en 0 minute et on n'a rejoint aucun autre sommet puisque l'on n'a pas encore emprunté de chemin...

	E	L	M	N	S	T
départ	∞	∞	$0(M)$	∞	∞	∞

Etape 1 :

On sélectionne le plus petit résultat de la dernière ligne, ici, c'est $0(M)$ qui correspond au chemin menant au sommet M en 0 minutes. On met évidence cette sélection (nous l'écrivons en rouge, mais il est également possible de l'entourer ou de souligner, etc.).

- **On inscrit le sommet retenu et la durée correspondante dans la première colonne (ici on écrit $\boldsymbol{M(0)}$.**
- **On désactive les cases situées en dessous de notre sélection en les coloriant par exemple. En effet, on a trouvé le trajet le plus court menant à $\boldsymbol{M}$; il sera utile d'en chercher d'autres.**

	E	L	M	N	S	T
départ	∞	∞	$0(M)$	∞	∞	∞

$M(0)$						

À partir de M, on voit sur le graphe que l'on peut rejoindre E, L et N en respectivement 10, 7 et 4 minutes. Ces durées sont les durées les plus courtes ; elles sont inférieures aux durées inscrites sur la ligne
Précédente qui était « ∞ ».

On inscrit donc 10_M, 7_M et , dans les colonnes E, L et N. Le M situé en indice signifie que l'on vient du sommet M.

Enfin on complète la ligne en recopiant dans les cellules vides les valeurs de la ligne précédente.

	E	L	M	N	S	T
départ	∞	∞	$0(M)$	∞	∞	∞
$M(0)$	$\mathbf{10_M}$	$\mathbf{7_M}$		$\mathbf{4_M}$	∞	∞

Etape 2 :

On sélectionne **le plus petit résultat** de la dernière ligne. Ici, c'est «$\mathbf{4_M}$ » qui correspond au chemin menant au sommet N en 4 minutes.

- **On met en évidence cette sélection.**
- **On inscrit le sommet retenu et la durée correspondante dans la première colonne : N (4).**
- **On désactive les cases situées en dessous de notre sélection. On a trouvé le trajet le plus court menant à N ; il dure 4 minutes.**

	E	L	M	N	S	T
départ	∞	∞	$0(M)$	∞	∞	∞
$M(0)$	$\mathbf{10_M}$	$\mathbf{7_M}$		$\mathbf{4_M}$	∞	∞
$N(4)$						

À partir de N, on peut rejoindre L et S (on ne se préoccupe plus de M qui a été « désactivé »).

- **Si l'on rejoint L** : On mettra 2 minutes pour aller de N à L et 4 minutes pour aller de M à N (ces 4 minutes sont inscrites dans la première colonne) soit au total 6 minutes. **Ce trajet est plus rapide que le précédent** qui durait 7 minutes. **On indique donc 6_N dans la colonne L**. Le N situé en indice signifie que l'on vient du sommet N.
- **Si l'on rejoint S** : On mettra 8 minutes pour aller de N à S et 4 minutes pour aller de M à N soit au total 12 minutes. **Ce trajet est plus rapide que le précédent** qui était ∞. **On indique donc 12_N dans la colonne S.**

Puis on complète la ligne en recopiant dans les cellules vides les valeurs de la ligne précédente.

	E	L	M	N	S	T
départ	∞	∞	$0(M)$	∞	∞	∞
$M(0)$	$\mathbf{10_M}$	$\mathbf{7_M}$		$\mathbf{4_M}$	∞	∞

$N(4)$	$\mathbf{10}_{M}$	$\mathbf{6}_{N}$			$\mathbf{12}_{N}$	∞

Etape 3:

On sélectionne **le plus petit résultat** de la dernière ligne. Ici, c'est « $\mathbf{6}_{N}$» qui correspond au chemin me-nant au **sommet L** en 6 minutes.

- **On met en évidence cette sélection**.
- **On inscrit le sommet retenu et la durée correspondante dans la première colonne** : L (6).
- **On désactive les cases situées en dessous de notre sélection**. On a trouvé le trajet le plus court menant à L ; il dure 6 minutes.

	E	L	M	N	S	T
départ	∞	∞	$0(M)$	∞	∞	∞
$M(0)$	$\mathbf{10}_{M}$	$\mathbf{7}_{M}$		$\mathbf{4}_{M}$	∞	∞
$N(4)$	$\mathbf{10}_{M}$	$\mathbf{6}_{N}$			$\mathbf{12}_{N}$	∞
$L(6)$						

À partir de L, on peut rejoindre E et S (on ne se préoccupe plus de M ni de N qui ont été « désactivés »).

- **Si l'on rejoint E** : On mettra 8 minutes pour aller de L à E et 6 minutes pour aller de M à L soit, au total, 14 minutes. **Ce trajet n'est pas plus rapide que le précédent** qui durait 10 minutes.

On se contente donc de recopier le contenu précédent $\mathbf{10}_{M}$ dans la colonne E.

- **Si l'on rejoint S** : On mettra 5 minutes pour aller de L à S et 6 minutes pour aller de M à L soit au total 11 minutes**. Ce trajet est plus rapide que le précéden**t qui durait 12 minutes. On indique donc $\mathbf{11}_{L}$ dans la colonne S.

Très important : On inscrit la durée d'un trajet dans le tableau uniquement si elle est inférieure à la durée figurant sur la ligne précédente. Dans le cas contraire, on recopie la valeur précédente.

	E	L	M	N	S	T
départ	∞	∞	$0(M)$	∞	∞	∞
$M(0)$	$\mathbf{10}_{M}$	$\mathbf{7}_{M}$		$\mathbf{4}_{M}$	∞	∞
$N(4)$	$\mathbf{10}_{M}$	$\mathbf{6}_{N}$			$\mathbf{12}_{N}$	∞
$L(6)$	$\mathbf{10}_{M}$				$\mathbf{11}_{L}$	∞

Etape 4:

On sélectionne **le plus petit résultat**. C'est « $\mathbf{10}_{M}$» qui correspond au chemin menant au sommet E en 10 minutes.

- **On met en évidence cette sélection**.
- **On inscrit le sommet retenu et la durée correspondante dans la première colonne :** E (10).

• **On désactive les cases situées en dessous de notre sélection**. On a trouvé le trajet le plus court menant à E ; il dure 10 minutes.

	E	L	M	N	S	T
départ	∞	∞	$0(M)$	∞	∞	∞
$M(0)$	$\mathbf{10}_{M}$	$\mathbf{7}_{M}$		$\mathbf{4}_{M}$	∞	∞
$N(4)$	$\mathbf{10}_{M}$	$\mathbf{6}_{N}$			$\mathbf{12}_{N}$	∞
$L(6)$	$\mathbf{10}_{M}$				$\mathbf{11}_{L}$	∞
$E(10)$						

À partir de E, on peut rejoindre S et T (on ne se préoccupe plus des autres sommets qui ont été « désactivés »).

• **Si l'on rejoint S** : On mettra 10 minutes pour aller de E à S et 10 minutes pour aller de M à E (ces 10 minutes sont inscrites dans la première colonne) soit au total 20 minutes. **Ce trajet n'est pas plus rapide** que le précédent qui durait 11 minutes. **On se contente donc de recopier le contenu précédent** $\mathbf{11}_{L}$ dans la colonne S.

• **Si l'on rejoint T** : On mettra 4 minutes pour aller de E à T et 10 minutes pour aller de M à E soit au total 14 minutes. **Ce trajet est plus rapide que le précédent** qui était ∞. On indique donc $\mathbf{14}_{E}$ dans la colonne T.

	E	L	M	N	S	T
départ	∞	∞	$0(M)$	∞	∞	∞
$M(0)$	$\mathbf{10}_{M}$	$\mathbf{7}_{M}$		$\mathbf{4}_{M}$	∞	∞
$N(4)$	$\mathbf{10}_{M}$	$\mathbf{6}_{N}$			$\mathbf{12}_{N}$	∞
$L(6)$	$\mathbf{10}_{M}$				$\mathbf{11}_{L}$	∞
$E(10)$					$\mathbf{11}_{L}$	$\mathbf{14}_{E}$

Etape 5:

On sélectionne **le plus petit résultat**. C'est « $\mathbf{11}_{L}$» qui correspond au chemin menant au **sommet S** en 11 minutes.

On a trouvé le trajet le plus court menant à S : il dure **11 minutes**. Comme c'est la question posée dans l'énoncé, il est inutile d'aller plus loin et le tableau est terminé !

	E	L	M	N	S	T
départ	∞	∞	$0(M)$	∞	∞	∞
$M(0)$	$\mathbf{10}_{M}$	$\mathbf{7}_{M}$		$\mathbf{4}_{M}$	∞	∞
$N(4)$	$\mathbf{10}_{M}$	$\mathbf{6}_{N}$			$\mathbf{12}_{N}$	∞
$L(6)$	$\mathbf{10}_{M}$				$\mathbf{11}_{L}$	∞
$E(10)$					$\mathbf{11}_{L}$	$\mathbf{14}_{E}$

Il reste toutefois à reconstituer le trajet qui correspond à cette durée de 11 minutes.
En pratique, il est plus facile de trouver le trajet en sens inverse en « remontant » dans le tableau de la façon suivante :

- On part de notre point d'arrivée : S
- On recherche la cellule marquée en rouge de la colonne S ; elle contient $\mathbf{11}_L$ On note la lettre écrite en indice : L.
- On recherche la cellule marquée en rouge de la colonne L ; elle contient $\mathbf{6}_N$ On note la lettre écrite en indice : N.
- On recherche la cellule marquée en rouge de la colonne N ; elle contient . On note la lettre écrite en indice : M.

On est arrivé à notre point de départ M après être passé par N et L et S (liste obtenue en listant les Sommets en ordre inverse).

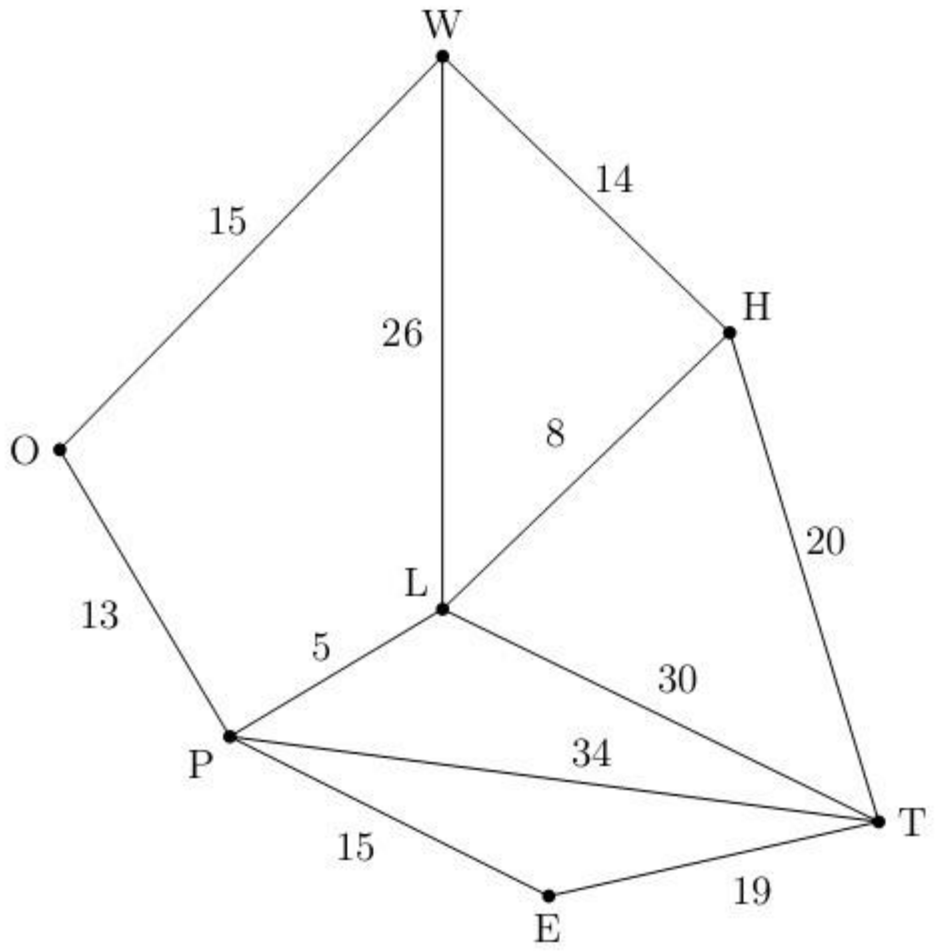
Le trajet optimal est donc M - N - L - S.

Enfin, on peut vérifier sur le graphe que ce trajet est correct et dure 11 minutes !

EXERCICE D'APPLICATION :

La classe de Terminale d'Arthur est en voyage scolaire en Angleterre. Plusieurs sites de Londres sont visités: Warren Street, Oxford Circus, Piccadilly Circus, Leicester Square, Holborn, Embankment et Temple. Ces lieux sont désignés respectivement par les lettres W, O, P, L, H, E et T et sont représentés dans le graphe Γ donné (chaque sommet représente un site à visiter et chaque arête une route reliant deux sites). Les élèves sont laissés en autonomie deux heures. Lepoint de rendez-vous avec les organisateurs est fixé à Temple. Les temps de parcours en minutes sont sur le graphe. Arthur, qui est à Oxford Circus, n'a pas vu le temps passer. Lorsqu'il s'en rend compte, il ne lui reste plus que 40 minutes pour arriver à Temple.

Déterminer le plus court chemin en minutes reliant Oxford Circus à Temple. Justifier la réponse à l'aide d'un algorithme. Arthur sera-t-il en retard ?


W
15
14
26
H
O
8
20
L
13
5
30
34
P
T
15
19
E

LEÇON 4: Arbres et arbres couvrants

Durée : 100 minutes

OBJECTIFS PEDAGOGOGIQUES

L'élève doit être capable de :

- Définir Arbre, Arbre couvrant
- Identifier et déterminer un arbre couvrant dans un graphe connexe en utilisant l'algorithme de parcours en largeur (BFS)
- Identifier et déterminer un arbre de poids minimum d'un graphe pondéré en utilisant

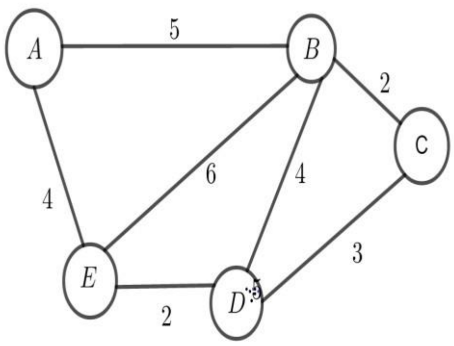
  L'algorithme de Krustal ou prim.

PREREQUIS

1. Définir graphe connexe puis schématiser un exemple de graphe connexe.
2. Définir poids d'une arrête, graphe pondéré et dire comme trouver le poids d'un graphe pondéré donné.
3. Définir cycle dans un graphe, dessiner un graphe de votre choix et faite ressortir au moins deux cycles de votre choix.

SITUATION PROBLEME

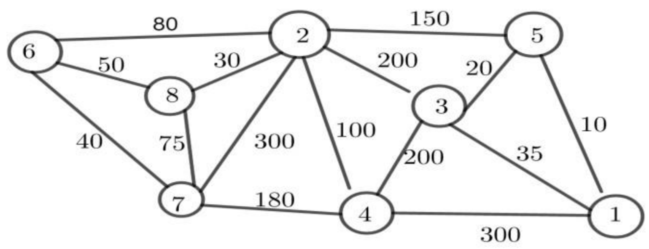
Un réseau comporte des machines A, B, C, D et E qui doivent pouvoir communiquer entres elles. Les liaisons envisagées sont représentées par le graphe suivant (les arêtes sont étiquetées par des distances entre les machines) ; comment câbler le réseau à moindre cout ?



ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

Monsieur le ministre des travaux public du Cameroun désire relier plusieurs villes du Cameroun par un réseau routier donc t'il a modélisé à l'aide d'un graphe dans lequel les sommets représentent toutes les villes du réseau, les arêtes, les tronçons qu'il est possible de construire et les poids des arêtes correspondent aux couts(en milliers de FCFA) de construction du tronçon correspondant. Le problème de monsieur le ministre est de réaliser ce réseau routier en minimisant le cout de construction la manière la

plus petite possible. Il fait appel à des ingénieurs et leur présente le graphe de construction.



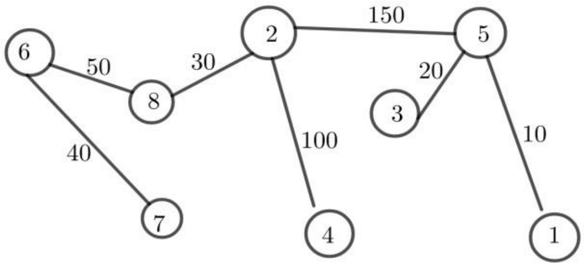
Le but de cet exercice est de trouver un graphe partiel connexe contenant tous les sommets du graphe ci-dessous afin de pouvoir minimiser le cours de construction de ce réseau routier.

1. Trier les arêtes de ce graphe par ordre de poids croissant.
2. Ensuite prendre les arêtes un en un dans cet ordre sachant qu'une arête est retenu si elle ne forme pas un cycle avec ceux déjà choisis et ce jusqu'avoir n-1 arêtes. (n étant le nombre de sommets du graphe).
3. En utilisant les arêtes choisis à la question 2. Faire ressortir le graphe partiel recherché.
4. Calculer la somme des poids des arêtes du graphe partiel construit et en déduire la somme que doit disposer monsieur le ministre pour réaliser se projet.

SOLUTION

1. Tri des arêtes par poids croissants
   Arête : [1,5] [3,5] [2,8] [3,1] [6,7] [6,8] [7,8] [2,6] [2,4] [2,5] [4,7] [3,4] [2,3] [1,4] [2,7]

   Poids : 10 20 30 35 40 50 75 80 100 150 180 200 200 300 300
2. On peut choisir **[1,5]** puis **[3,5]** puis **[2,8]** mais pas [3,1] (qui formerait un cycle avec [1,5] et [3,5]). Puis on peut choisir **[6,7]** puis **[6,8]** mais pas [7,8] ni [2,6]. Puis on peut choisir **[2,4]** puis **[2,5].**
   On s'arrête ici car le nombre d'arêtes choisies est 7 (c'est-à-dire n-1, puisque n=8).
3. Faisons ressortir le graphe partiel.



4. La somme des poids des arêtes est : 10+20+150+100+30+50+40=**400.** Monsieur le ministre doit disposer une somme de 400milliers de FCFA.

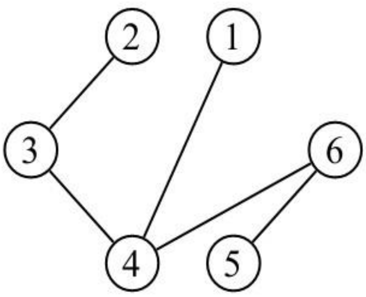
RESUME

1. Arbres et foret

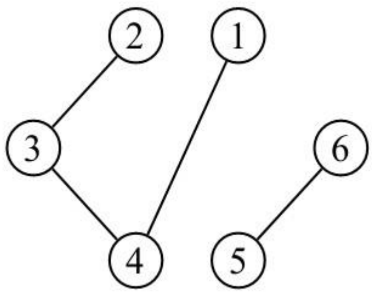
1.1. Définitions

- **Un arbre** est tout graphe connexe sans cycle. Un graphe sans cycle non connexe est appelé **une forêt**.
- **Une feuille** ou **sommet pendant** est un sommet de degré 1.

Exemple 1 :



Arbre
Les sommets 1, 2 et 5 sont les feuilles



Forêt
Les sommets 1, 2, 5 et 6 sont les feuilles

Théorème 1 :

G est un arbre si et seulement l'une des affirmations suivantes est vraie :

1. G est sans cycle et connexe
2. G est sans cycles et comporte $n-1$ arêtes.
3. G est connexe et comporte $n-1$ arêtes.
4. Chaque paire u, v de sommets distincts est relié par une seule chaine simple (et le graphe est sans cycle).

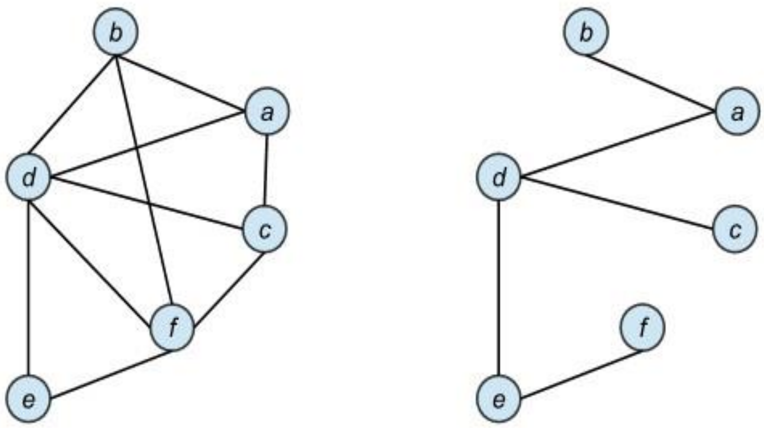
2. Arbres couvrants

2.1. Définitions

 Un arbre couvrant (aussi appelé **arbre maximal**) est un graphe partiel qui est aussi un arbre.

Exemple 2 :

La figure suivante montre un exemple d'arbre couvrant. Comme nous l'avons vu dans la définition des graphes partiels (leçon 2), tous les sommets du graphe initiale sont bien présents dans le sous-graphe de G, l'ensemble des arêtes forme bien un arbre.



(a) Graphe G. (b) Un arbre couvrant dans G.

Exemple 3 :

Graphe G Un arbre couvrant

2.2. Propriété :

Un graphe est connexe si et seulement si il contient un arbre couvrant.

3. Détermination d'un arbre couvrant connexe (algorithme parcours en largeur dit encore BFS).

L'algorithme de parcours en largeur encore appelé en anglais Breadth First Seach (BFS) est un algorithme a usage nombreuse car elle nous permet de : montrer qu'un graphe est connexe, de déterminer un arbre couvrant dans un graphe donné, elle nous permet aussi le trouver le chemin court entre deux sommets d'un graphe comme l'algorithme de DIJKSTRA. Mais ce qui nous intéressera dans cette partie c'est utilisé cet algorithme pour déterminer un arbre couvrant connexe dans un graphe donné.

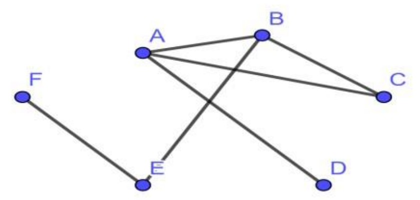
3.1. Principe :

Il s'agit de parcourir un graphe de proche en proche comme une tache d'huile, on commence au sommet initial, puis on va sur les sommets qui lui sont directement reliés (sommets voisins). A l'étape suivant les sommets non déjà franchis qui sont directement reliés à ceux de l'étape précédent, et ainsi de suite jusqu'au épuisement des sommets disponibles.

3.2. Algorithme de parcours en largeur

Exemple d'application pour mieux comprendre ce principe.

Soit le graphe non orienté suivant dont on cherche à faire un parcours en largeur :



- Pour commencer le parcours en largeur, nous devons choisir un des sommets pour démarrer. Le choix de ce sommet dépend de tout un chacun. Dans cet exemple, par commodité et simplicité on choisira le sommet A.
- Notre sommet A choisit est placé dans un élément appelé file et seul la tête (début de la file) de la file va nous intéresser. Et se A sommet est aussi placé en tête de parcours qui est la liste que nous devons construire.
  File :(A
  Père (nous dirons par la suite le rôle de cette rubrique)
  Parcours :(A
- Nous Plaçons dans la file tous les voisins de A (tous les sommets reliés à A par une arête) à la suite de A. et ces voisins sont aussi placez par la file parcours à la suite du sommet A.
  File :(A|A

  |B
  |C
  |D
  Père A A A
  Parcours :(A, B, C, D

Les voisins du sommet A sont : B, C et D. Le père de B, C et D étant A. le père ici nous permettra de trouver les différentes arêtes qui ont servi pour construit le parcours c'est-à-dit dans l'algorithme usuel on a une liste d'arête. Donc on aurez pu remplacer père par liste d'arêtes ou on n'aurait mis l'arête A-B, A-C, A-D. Une fois que j'ai finir avec le premier sommet et je n'ai plus de voisin inutilisé, je le barre et je remonte toute ma file, donc B, C, D remonte dans la file avec B la tête de la file. On cherche les voisins de E qui ne sont pas encore utilisé, il s'agit uniquement E ensuite on le place à la fin de la file. Nous plaçons ensuite ce voisin de B dans la file parcours avec pour père B.

File :(A|~~A~~ |B
|B |C
|C |D
|D |E
Père A A A B
Parcours :(A, B, C, D, E

- Nous avons terminé avec B, on le barre et on remonte la file(C, D, E) c'est C qui est en tête de file mais n'a plus de voisin non utilisé, on le barre et on passe au sommet suivant dans la file qui est D; or D n'a plus de voisins non utilisé, on le barre et on se retrouve avec en première tête de file le sommet E qui repasse en tête.

  Le E a un voisin non utilisé F qu'on place dans la file à la suite de E. et ce F est mis à la queue dans la file Parcours avec comme père E.

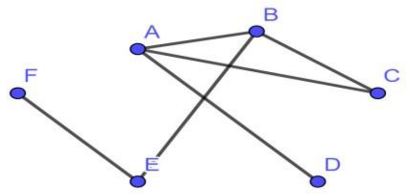
File :(A|~~A~~ |~~B~~|~~C~~|E
|B |C|~~D~~|F
|C |D|E
|D |E
Père A A A B E
Parcours :(A, B, C, D, E, F

- Nous n'avons plus de voisin non utilisé pour E et F donc nous pouvons les barrés, la file est donc terminée ainsi que notre parcours nous pouvons donc fermer la parenthèse de la file de parcours.

File :(A|~~A~~ |~~B~~|~~C~~|~~E~~

|B |C|~~D~~|~~F~~
|C |D|E
|D |E
Père A A A B E
Parcours :(A, B, C, D, E, F)

Dans la file de parcours, comme tous les sommets ont été utilisés, notre graphe est donc connexe. Une fois ceci fais nous pouvons nous servit des arêtes sauvegardé comme père (A-B, A-C, A-D, B-E, E-F) pour obtenir notre arbre couvrant.



4. **Détermination d'un arbre couvrant de poids minimum d'un graphe pondéré (algorithme de Kruskal et Prim).**

L'algorithme de Kruskal et celui de Prim sont des algorithmes de recherche d'arbre couvrant de poids minimum dans un graphe connexe non-orienté et pondéré.

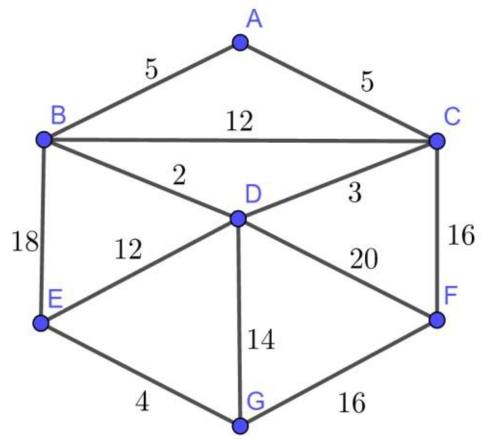
4.1 Algorithme de Kruskal

a. Principe de cet algorithme

- **Trier les arêtes par ordre croissant de poids**
- **Prendre les arêtes dans cet ordre : une arête n'est retenu que si elle ne forme pas de cycle avec les arêtes déjà choisies et ce jusqu'à avoir n-1 arêtes. (n étant le nombre de sommets du graphe de depart)**

b. Exemple d'application de l'algorithme de Kruskal.

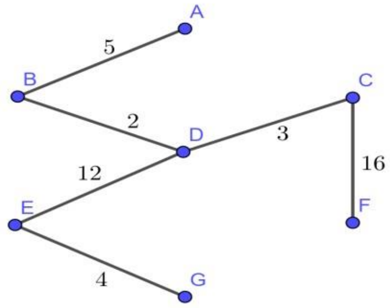
Appliquons l'algorithme au graphe suivant :



Les arêtes sont considérées dans l'ordre suivant : BD, CD, EG, AB, AC, BC, DE, DG, CF, FG, BE et DF. Il y'a 7 sommets, l'arbre aura donc 6 arêtes. **BD, CD, EG et AB** sont choisies, AC est rejetée (elle forme un cycle avec

AB, BD et CD). Remarquons qu'on aurait pu choisir AC à la place AB puis rejetée BC est rejetée (elle forme un cycle avec BD et CD), on prend ensuite **DE**, DG est rejetée (elle forme un cycle avec DE et EG), **CF** est choisie, là aussi FG aurait pu être choisie. Il y'a 6 arêtes, l'algorithme se termine donc. L'arbre construit est de poids 42.

Poids qui peut être calculé incrémentalement au fur et à mesure du choix des arêtes.
Nous avons alors obtenu l'arbre suivant :



4.2. Algorithme de Prim

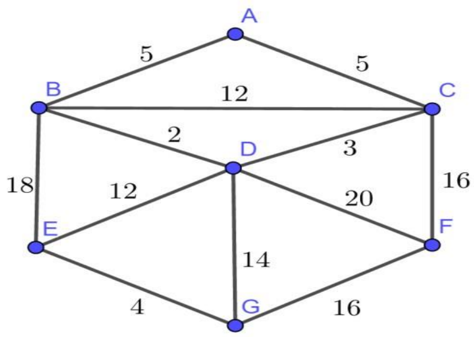
Cet algorithme est similaire à celui de DIJKSTRA utilisé pour le calculer des plus courts chemins mais le critère de choix est ici de prendre l'arete de poids minimal entre les sommets retenus (déjà dans l'arbre) et leurs voisins
(par encore dans l'arbre).

a. Principe de cet algorithme

Initialement l'arbre est réduit à un sommet quelconque, dans le graphe de l'exemple précédent on pourra prendre le sommet A, l'étape courante consiste à choisir une arête de poids minimal parmi celles joignant un sommet de l'arbre courant aux autres sommets, ceci jusqu'à atteindre tous les sommets.

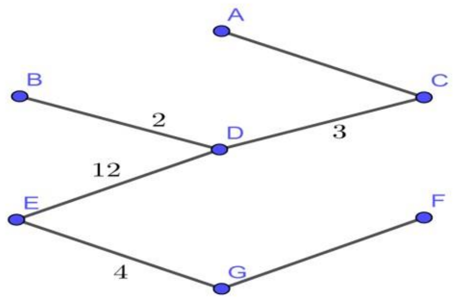
b. Exemple d'application de l'algorithme de Prim

Reprenons le graphe de l'exemple précédent et appliquons l'algorithme de Prim.



A partir du sommet A, on peut sélectionner les sommets dans l'ordre : **C** (par l'arête AC, on aurait pu choisir B pour l'arête AB), **D** (par l'arête CD), **B** (par l'arête BD), **E** (par l'arête ED), **G** (par l'arête EG), et **F** (pour l'arête

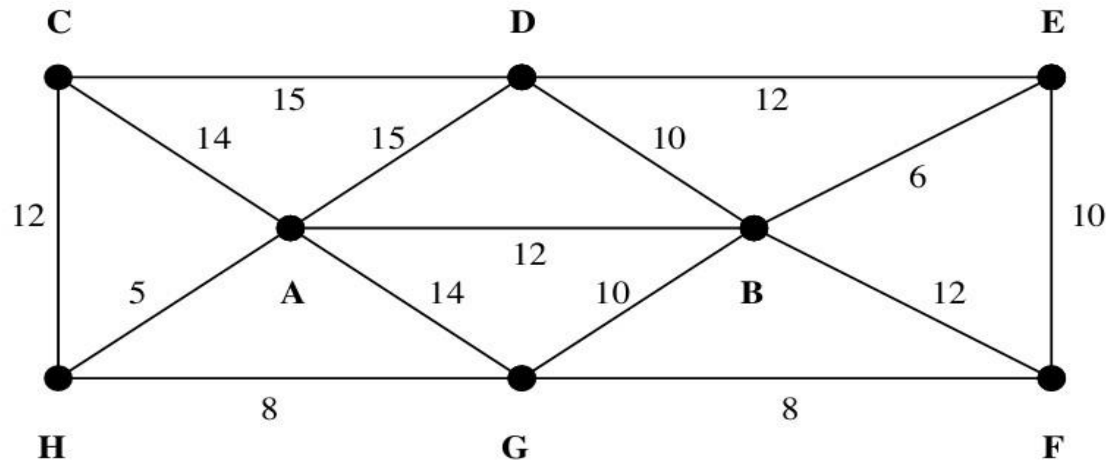
FG, on aurait pu choisir F pour l'arête CF). Tous les sommets ayant été atteints l'algorithme se termine avec un arbre couvrant de poids **42.** L'arbre obtenu n'est pas le même que le précédent, mais il est de même valeur.



EXERCICE D'APPLICATION

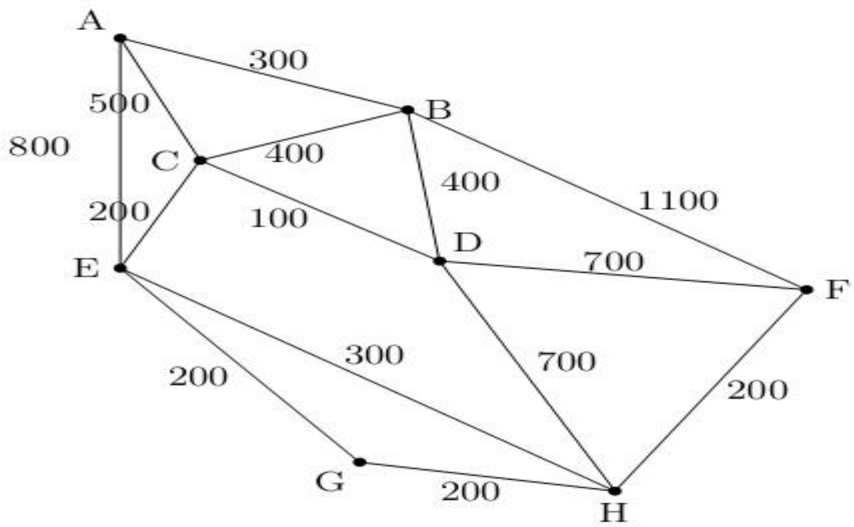
Application 1 :

En appliquant l'algorithme de KRUSKAL et celui de PRIM. Déterminer un arbre couvrant de poids minimal.



Application 2 :

1. Soit le graphe ci-dessus ? en utilisant l'algorithme de parcours en largeur, vérifié si ce graphe est connexe ou pas. Si l'est donné un arbre couvrant de se graphe ?
2. Ce graphe est-il est arbre ? justifier votre réponse.
3. En appliquant l'algorithme de Prim et celui de Kruskal déterminé un arbre couvrant de poids minimum.
4. Déterminer, en utilisant un algorithme dont on citera le nom, le trajet autoroutier le plus court (en kilomètres) pour aller de A à F.
   Préciser la longueur en kilomètres de ce trajet.


A
300
500
B
800
C
400
400
1100
200
100
D
E
700
F
300
700
200
200
G
200
H

CHAPITRE IV : PRIMITIVES D'UNE FONCTION CONTINUE SUR UN INTERVALLE

INTERET : Les primitives sont utilisées quand on a la dérivée d'une fonction et qu'on cherche la fonction elle-même. Tu verras cela en mécanique lorsque tu chercheras les équations horaires d'un projectile. D'une manière générale, les primitives sont importantes puisque les dérivées le sont, et que ces deux notions sont étroitement liées.

MOTIVATION : Comme nous le verrons plus tard, les intégrales sont liées aux primitives et elles permettent de calculer les aires sous la courbe d'une fonction. Par exemple le travail d'une force d'un point à un autre peut se calculer à l'aide d'une intégrale mais le calcul d'une intégrale nécessite généralement la connaissance des primitives. Donc la maitrise des primitives est fondamentale pour affronter le calcul des intégrales.

PRE-REQUIS : Continuité et dérivabilité d'une fonction sur un intervalle.

LEÇON 1 : PRESENTATION ET DEFINITION

DUREE : 50 minutes

COMPETENCE A ACQUERIR PAR LES ELEVES :

- Justifier qu'une fonction est une primitive d'une fonction donnée sur un intervalle et déduire toutes les primitives de cette fonction sur cet intervalle ;
- Déterminer la primitive d'une fonction vérifiant certaine(s) condition(s).

VERIFICATION DES PREREQUIS :

1) Déterminer la dérivée f de la fonction F sur l'intervalle indiqué.

a) $F(x) = 5x \quad I = \mathbb{R}$; b) $F(x) = x^2 \quad I = \mathbb{R}$; c) $F(x) = \frac{1}{x} \quad I =]-\infty\ ;\ 0[$

d) $F(x) = \sin x \quad I = \mathbb{R}$; e) $F(x) = 2\sqrt{x} \quad I =]0\ ;\ +\infty[$; g) $F(x) = \frac{3}{2}x^2 \quad I = \mathbb{R}$

h) $F(x) = \frac{3}{2}x^2 + \sin x \quad I = \mathbb{R}$; i) $F(x) = 5x + x^2 \quad I = \mathbb{R}$

2) Dans chacun des cas ci-dessus, existe-t-il une autre fonction G ayant une même dérivée f que F dans le même intervalle ?

CORRIGE DES PREREQUIS :

1) Déterminons la dérivée f de la fonction F sur l'intervalle indiqué

a) $f(x) = 5$; b) $f(x) = 2x$; c) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$; d) $f(x) = \cos x$

e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$; g) $f(x) = 3x$; h) $f(x) = 3x + \cos x$; i) $f(x) = 5 + 2x$

2) Déterminons une fonction G sur l'intervalle indiqué.

a) $G(x) = 5x + 4 \quad I = \mathbb{R}$; b) $G(x) = x^2 - 2 \quad I = \mathbb{R}$; c) $G(x) = \frac{1}{x}+5,3 \quad I =]-\infty\ ;\ 0[$

d) $G(x) = \sin x + 4\pi \quad I = \mathbb{R}$; e) $G(x) = 2\sqrt{x} \quad I =]0\ ;\ +\infty[$; g) $G(x) = \frac{3}{2}x^2 \quad I = \mathbb{R}$

h) $G(x) = \frac{3}{2}x^2 + \sin x + \frac{\pi}{2}\sqrt{3} \quad I = \mathbb{R}$; i) $G(x) = 5x + x^2 - 2020 \quad I = \mathbb{R}$.

SITUATION PROBLEME :

Au cours de ses révisions, Sandrine jeune pro-bachelière affirme que la dérivée de la fonction $x \mapsto x^2 + \tan x$ est la fonction $x \mapsto 2x + 1 + (\tan x)^2$. Son grand frère Delma lui demande de justifier qu'il existe une infinité de fonctions dont la dérivée est la fonction $x \mapsto 2x + 1 + (\tan x)^2$ mais qu'il existe une et une seule dont la dérivée est la fonction $x \mapsto 2x + 1 + (\tan x)^2$ et qui passe par le point $A(0\,;\,-1)$.

Aide Sandrine à faire ces justifications.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

On considère la fonction F définie sur $I = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par : $F(x) = x^2 + \tan x$.

1) Déterminer la fonction dérivée de F.

2) On définit les fonctions G et H sur I par : $G(x) = F(x) + 1$ et $H(x) = F(x) - 2$.

a) Déterminer les dérivées G'et H' des fonctions G et H sur I.

b) En déduire trois fonctions dérivables sur I et ayant toutes pour dérivée la fonction f définie sur I par

$f(x) = 2x + 1 + (\tan x)^2$.

c) En utilisant la question 2-b), déterminer toutes les fonctions K qui admettent f pour fonction dérivée.

d) Déterminer la fonction M qui admet f pour fonction dérivée et qui prend la valeur $y_0 = -1$ en $x_0 = 0$.

3) Soit L une fonction définie sur I et dont la dérivée est la fonction f.

On pose pour tout $x \in I$, $L(x) = M(x) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Montrer que si la courbe de la fonction L passe par le point $A(0\,;\,-1)$, alors $L = M$.

SOLUTION DE L'ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

1) Déterminons la fonction dérivée de F.

On a pour tout $x \in I$,

$F'(x) = 2x + 1 + (\tan x)^2$ et donc la fonction dérivée de F sur I est $x \mapsto F'(x)$.

2- a) Déterminons les dérivées G'et H' des fonctions G et H sur I.

On a pour tout $x \in I$,

$G'(x) = 2x + 1 + (\tan x)^2 = F'(x)$ et $H'(x) = 2x + 1 + (\tan x)^2 = F'(x)$.

2-b) Déduisons trois fonctions dérivables sur I et ayant toutes pour dérivée la fonction f.

Il suffit de prendre les fonctions F, G et H définies par :

$F(x) = x^2 + \tan x$, $G(x) = x^2 + \tan x + 1$ et $H(x) = x^2 + \tan x - 2$.

2-c) En utilisant la question 2-b), déterminons toutes les fonctions K qui admettent f pour fonction dérivée.

Pour tout $x \in I$, $K(x) = x^2 + \tan x + c$ avec $c \in I$.

2- d) Déterminons la fonction M qui admet f pour fonction dérivée et qui prend la valeur $y_0 = -1$ en $x_0 = 0$.

On a : $y_0 = K(x_0) = {x_0}^2 + \tan x_0 + c$ ie $0^2 + \tan 0 + c = -1$ et donc $c = -1$. D'où $M : x \mapsto x^2 + \tan x - 1$.

3) Montrons que si la courbe de la fonction L passe par le point $A(0\,;\,-1)$, alors $L = M$.

On a : $-1 = L(0)$ ie $-1 = M(0) + k$ et donc $k = 0$ car $M(0) = -1$. D'où $L = M$.

RESUME :

- Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$; on appelle primitive de f sur I, toute fonction F définie sur I telle que pour tout x élement I, on a : $F'(x) = f(x)$.
- Toute fonction définie et continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.
- Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I, F une primitive de f sur I et k un nombre réel.
  - ✓ La fonction G définie sur I par $G(x) = F(x) + k$ est encore une primitive de f sur I.
  - ✓ Toute primitive de f sur I est de la forme $x \mapsto F(x) + k$, où $k \in \mathbb{R}$.
- Soit f une fonction admettant une primitive sur un intervalle I, y_0 un nombre réel et x_0 un élément de I.

Il existe une unique primitive de f sur I qui prend la valeur y_0 en x_0.

EXERCICES D'APPLICATIONS :

1) Dans chacun des cas ci-dessous, vérifier que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I

a) $F(x) = 3x^2 + 7x - 5 + \sin x$; $f(x) = 6x + 7 + \cos x$ $\qquad I = \mathbb{R}$

b) $F(x) = -3x^3 + 4x^2 - 13x + 5$ $\qquad f(x) = -9x^2 + 8x - 13$ $\qquad I = \mathbb{R}$

c) $F(x) = \sqrt{2x - 6}$ $\qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-6}}$ $\qquad I =]3\ ;\ +\infty[$

d) $F(x) = (\frac{1}{x} - \sqrt{x})^2$ $\qquad f(x) = \frac{(x\sqrt{x}-1)(2+x\sqrt{x})}{x^3}$ $\qquad I =]0\ ;\ +\infty[$

2) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -10\sin(5x + 2\pi)$.

a) Montrer que la fonction F_1 définie sur $\mathbb{R}$ par : $F_1(x) = 2co\,s(5x + 2\pi\,)$ est **une** primitive de f sur $\mathbb{R}$, puis donner une autre primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire toutes **les** primitives F_2 de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

c) Déterminer **la** primitive F_3 de la fonction f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur -4 en π.

TAFAD : Choisir 3 à 5 exercices du livre au programme.

LEÇON 2 : CALCULS DE PRIMITIVES

DUREE : 100 minutes

COMPETENCE A ACQUERIR PAR LES ELEVES :

- Déterminer les primitives d'une fonction donnée sur un intervalle ;
- Déterminer la primitive d'une fonction vérifiant certaine(s) condition(s).

VERIFICATION DES PREREQUIS :

Justifier que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I

a) $F(x) = 2x^4 - x + 7 + 2\sin x$; $f(x) = 8x^3 - 1 + 2\cos x$ $\qquad I = \mathbb{R}$

b) $F(x) = \sqrt{4x+8}$ $\qquad f(x) = \frac{2}{\sqrt{4x+8}}$ $\qquad I =]-2\ ;\ +\infty[$

CORRIGE DES PREREQUIS :

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = 2(4)x^{4-1} - 1 + 0 + 2(\cos x) = 8x^3 - 1 + 2\cos x = f(x)$.

Donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b) Pour tout $x \in]-2\ ;\ +\infty[$, $F'(x) = \frac{4}{2\sqrt{4x+8}} = \frac{2}{\sqrt{4x+8}} = f(x)$. Donc F est une primitive de f sur $]-2\ ;\ +\infty[$.

SITUATION PROBLEME :

Sandrine affirme que si U et V sont les primitives respectives des fonctions u et v sur un intervalle I et k un nombre réel, alors :

- ✓ La fonction $U + V$ est une primitive de la fonction $u + v$ sur I ;
- ✓ La fonction kU est une primitive de la fonction ku sur I ;
- ✓ Pour tout entier naturel n, la primitive de la fonction u^n est la fonction $\frac{u^{n+1}}{n+1}$;
- ✓ La primitive de la fonction $-\sin(u)$ est la fonction $\cos(u)$;
- ✓ La primitive de la fonction $cos(u)$ est la fonction $\sin(u)$.

A t'elle raison ?

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

Soient U et V les primitives respectives des fonctions u et v sur un intervalle I et k un nombre réel.

1) Justifier que :

a) La fonction $U + V$ est une primitive de la fonction $u + v$ sur I.

b) La fonction kU est une primitive de la fonction ku sur I.

2) La fonction $-\sin(u)$ est-elle une primitive sur I de la fonction $\cos(u)$? Justifier votre réponse

3) La fonction $cos(u)$ est-elle une primitive sur I de la fonction $\sin(u)$? Justifier votre réponse

4) Pour tout entier naturel n, la fonction $\frac{u^{n+1}}{n+1}$ est-elle une primitive sur I de la fonction u^n ? Justifie ta réponse.

5) Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer une primitive F de f sur un intervalle I que l'on précisera.

a) $f(x) = -3$;b) $f(x) = 4x + 3$; c) $f(x) = 2 - \frac{1}{x^2}$; d) $f(x) = \cos x$

e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 2x + 1$; g) $f(x) = 5x - 4$; h) $f(x) = -7x - 2\sin x$; i) $f(x) = 5 + 2x$.

SOLUTION DE L'ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

1-a) Justifions que la fonction $U + V$ est une primitive de la fonction $u + v$ sur I.

Pour tout $x \in I$, $(U + V)'(x) = U'(x) + V'(x) = u(x) + v(x) = (u + v)(x)$.

Donc $U + V$ est une primitive de la fonction $u + v$ sur I.

1-b) Justifions que la fonction kU est une primitive de la fonction ku sur I.

Pour tout $x \in I$, $(kU)'(x) = kU'(x) = ku(x)$. Donc kU est une primitive de la fonction ku sur I.

2) la fonction $\cos(u)$ est une primitive sur I de la fonction $-\sin(u)$ car $\left(\cos(u)\right)' = -\sin(u)$.

3) La fonction $\sin(u)$ est une primitive sur I de la fonction $\cos(u)$ car $\left(\sin(u)\right)' = cos(u)$.

4) la fonction u^n est une primitive sur I de la fonction $\frac{u^{n+1}}{n+1}$ car $\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right)' = \frac{1}{n+1}(n+1)u^n = u^n$.

5) Déterminons une primitive F de f sur un intervalle I que l'on précisera.

a) $F(x) = -3x \quad I = \mathbb{R}$; b) $F(x) = 2x^2 + 3x + 1 \quad I = \mathbb{R}$; c) $F(x) = 2x + \frac{1}{x} \quad I =]-\infty\,;0[$

d) $F(x) = \sin x \quad I = \mathbb{R}$; e) $F(x) = 2\sqrt{x} - x^2 + x \quad I =]0\,;+\infty[$; g) $F(x) = \frac{5}{2}x^2 - 4x \quad I = \mathbb{R}$

h) $F(x) = -\frac{7}{2}x^2 + 2\cos x \quad I = \mathbb{R}$; i) $F(x) = 5x + x^2 + 2021 \quad I = \mathbb{R}$

RESUME :

- La connaissance des dérivées des élémentaires permet de dresser le tableau suivant, où $c \in \mathbb{R}$.

Fonction f	Primitives de f	Sur l'intervalle
$x \mapsto a \ \ (a \in \mathbb{R})$	$x \mapsto ax + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n \ (n \in \mathbb{N})$	$x \mapsto \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	$\mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N}\backslash\{1\})$	$x \mapsto \dfrac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + c$	$]-\infty\ ;\ 0[\ ou\ ]0\ ;\ +\infty[$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + c$	$]0\ ;\ +\infty[$
$x \mapsto x^r$ $(r \in \mathbb{Q}\backslash\{-1\})$	$x \mapsto \dfrac{1}{r+1}x^{r+1} + c$	$[0\ ;\ +\infty[$ si $r \geq 0$ $]0\ ;\ +\infty[$ si $r < 0$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x + c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto 1+(\tan x)^2 = \frac{1}{(\cos x)^2}$	$x \mapsto \tan x + c$	$\left](2k-1)\dfrac{\pi}{2}\ ;\ (2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right[$ $(k \in \mathbb{Z})$

- Soit U et V les primitives respective des fonctions u et v sur un intervalle I ; k un nombre réel
  - ✓ La fonction $u + v$ admet pour primitive sur I la fonction $U + V$;
  - ✓ La fonction ku admet pour primitive sur I la fonction kU.
- Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et v une fonction dérivable sur un intervalle contenant $u(I)$

  La fonction $u' \times (v' o\ u)$ admet pour primitive sur I la fonction $v\ o\ u$.

- On en déduit le tableau suivant :

Fonction f	Une primitives de f	Commentaires
$u'u^n$ $(n \in \mathbb{N})$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$	Sur tout intervalle où u est dérivable
$\frac{u'}{u^n}$ $(n \in \mathbb{N}\backslash\{1\})$	$\dfrac{-1}{(n-1)u^{n-1}}$	Sur tout intervalle où u est dérivable et ne s'annule pa
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	Sur tout intervalle où u est dérivable et strictement positive
$u'u^r$ $(r \in \mathbb{Q}\backslash\{-1\})$	$\dfrac{1}{r+1}u^{r+1}$	Sur tout intervalle où u est dérivable et positive (strictement positive, si $r < 0$)
$u'\cos u$	$\sin u$	Sur tout intervalle où u est dérivable
$u'\sin u$	$\cos u$	Sur tout intervalle où u est dérivable

- Pour déterminer les primitives des fonctions trigonométriques du type $\mapsto (\sin x)^m\ (\cos x)^n\ (m, n\ \mathbb{N}^*)$, on peut utiliser l'un des procédés suivants :
  - ✓ Si m et n sont de même parité, linéariser $sin^m x\ cos^n x$;

- ✓ Si m et n sont de parités différentes, utiliser $sin^2x + cos^2x = 1$ et écrire $sin^m x$ $cos^n x$ sous la forme $\sin x\, P(\cos x)$ si m est impair ou $\cos x\, P(\sin x)$ si n est impair, P désignant un polynôme.

EXERCICES D'APPLICATIONS :

1) Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

a) $f(x) = 12x^3 + 8x^2 - 5x - 3$ $\qquad I = \mathbb{R}$

b) $f(x) = -6x^2 - 13x + \frac{1}{x^2} - 7$ $\qquad I =]0\ ;\ +\infty[$

c) $f(x) = x^2 - \frac{12}{\sqrt{x}}$ $\qquad I =]0\ ;\ +\infty[$

d) $f(x) = sinx - 4cosx + 5$ $\qquad I = \mathbb{R}$

e) $f(x) = x^3 - \frac{2}{(\cos x)^2} - (\tan x)^2$ $\qquad I = \left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$

2) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 15x^2(x^3 - 8)^5$

a) Déterminer **une** primitive F_1 de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire toutes **les** primitives F_2 de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

c) Déterminer **la** primitive F_3 de la fonction f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur $+4$ en 2.

3) On considère la fonction f définie sur $I =]1\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \frac{3x^3-7x^2+5x+1}{(x-1)^2}$.

a) Déterminer trois réels a, b et c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$.

b) En déduire **une** primitive de f sur $]1\ ;\ +\infty[$.

4) Soit g la fonction définie sur $I =]-2\ ;\ +\infty[$ par : $g(x) = (x+2)\sqrt{x+2}$.

Calculer $g'(x)$ et déduire une primitive de la fonction f définie sur $]-2\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x+2}$.

5) Déterminer **une** primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = (\sin x)^2$; b) $g(x) = (\cos x)^2$; c) $h(x) = (\sin x)^3$; d) $j(x) = (\cos x)^3$

e) $K(x) = (\sin x)^2(\cos x)^2$; f) $L(x) = (\sin x)^3(\cos x)^2$ et g) $M(x) = (\sin x)^4(\cos x)^5$.

TAFAD : Choisir 3 à 5 exercices du livre au programme.

Module ???	CONFIGURATIONS ET TRANSFORMATIONS DES PLANS

CHAPITRE 5

SIMILITUDE

Durée : 100 minutes

MOTIVATION

Ce chapitre contribue au développement de la technologie, de l'art et de la chimie.

CONTROLE DES PREREQUIS

Trouve le module et l'argument des nombres complexes suivants : $Z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $Z_2 = 2$; $Z_3 = i \; et \; Z_4 = 1 + i$

SOLUTION

$Z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $Z_2 = 2$; $Z_3 = i \; et \; Z_4 = 1 + i$

$|Z_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$;

$|Z_2| = |2| = 2$

$|Z_3| = |1| = 1$; $|Z_4| = |1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$arg\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \theta \; tel \; que \begin{cases} cos\theta = \frac{1}{2} \\ sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \; d'où \; est \; \frac{\pi}{3}$

; $arg(2) = \theta \; tel \; que \begin{cases} cos\theta = 1 \\ sin\theta = 0 \end{cases} \; d'où \; est \; 0$

$arg(i) = \theta \; tel \; que \begin{cases} cos\theta = 0 \\ sin\theta = 1 \end{cases} \; d'où \; est \; \frac{\pi}{2}$; $arg(1 + i)$

$= \theta \; tel \; que \begin{cases} cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \; d'où \; est \; \frac{\pi}{4}$

SITUATION PROBLEME

Un groupe d'élèves de la terminale D cherche à déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation du plan dans lui-même définie par $Z' = az + b$ où a et b sont les nombres complexes avec a non nul.

Comment peux-tu les aider ?

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

1- Soient M'et M deux points d'affixes respectifs Z' et Z. $\vec{u}$ un vecteur d'affixe b tel M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$.

   a- Donne une relation vectorielle entre les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\vec{u}$

   b- Exprimer Z' en fonction de Z et b.

2- Soient M', M et A trois points d'affixes respectifs Z', Z et 1+2i. k un nombre réel non nul et diffèrent de 1. On définie par h l'homothétie de centre A et de rayon k.

   a- Donne la relation vectorielle entre les vecteurs $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{AM}$

   b- Exprime Z' en fonction de Z et de k

3- Place le point A d'affixe $Z_A = 1 + i$ dans le plan complexe.

   a- construire le point A' image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

   b- conjecture graphiquement l'affixe Z' de A'.

   c- exprime Z' en fonction de Z et.

4- On pose f : Z'= (1+i) Z +2+3i et Z_A=2i

   a. Trouver Z_W tel que Z_W= (1+i) Z_W+2+3i

   b. Trouves $Z_{A'}$tel que $Z_{A'}$= (1+i) Z_A+2+3i

   c. Compares mes $\left(\widehat{\overrightarrow{WA};\overrightarrow{WA'}}\right)$ et $\mathrm{Arg}(1 + i)$ puis le rapport $\frac{WA'}{WA}$ et $|1 + i|$.

SOLUTION

1- M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$.

   a- On a $t_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

Comme $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$, $\leftrightarrow$ $Z' - Z = Z_{\vec{u}}$ $\Leftrightarrow$ $Z' = Z + b$ qui est l'écriture complexe d'une translation de vecteur d'affixe b

2- On a l'homothétie de centre A et de rapport k qui transforme le point M en M'.

   a- H(M) = $M' \Leftrightarrow \overrightarrow{AM'} = k\,\overrightarrow{AM}$.

   b- $\overrightarrow{AM'} = k\,\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow Z' - Z_{A'} = k(Z - Z_A) \Leftrightarrow Z' - (1 + 2i) = k\big(Z - (1 + 2i)\big)$

   $\leftrightarrow Z' = kZ + (1 + 2i)(1 - k)$ qui est l'écriture complexe de l'homothétie de centre A et de rapport k.

3- Les élèves vont placer rapidement le points A et construire le point A' à l'aide du rapporteur et du compact .

   a- Par conjecture , on $Z_{A'} = -1 + i$

b- On a $\frac{Z_{A'}}{Z_A} = \frac{-1+i}{1+i} = i$ d'où $Z_{A'} = iZ_A$ qui est l'écriture complexe de la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

4- On pose f : Z'= (1+i) Z +2+3i et Z_A=2i

c- Z_W= (1+i) Z_W+2+3i ⇔ $Z_W = \frac{2+3i}{1-1-i} = -3+2i$. On dit que W est invariant par f. c'est-à-dire que le point W est le centre de f.

d- $Z_{A'}$= (1+i) Z_A+2+3i ⇔ $Z_{A'}$= $(1+i)(2i)+2+3i = 5i$

e- mes $\left(\widehat{\overrightarrow{WA};\overrightarrow{WA'}}\right) = arg\left(\frac{Z_{A'}-Z_w}{Z_A-Z_w}\right) = arg(Z_A - Z_w) - arg(Z_{A'} - Z_w)$

$$= arg(-3) - arg(-3-3i)$$
$$= \pi + \frac{3\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi \text{ d'où}$$

Arg$\left(\frac{Z_{A'}-Z_w}{Z_A-Z_w}\right) = \frac{\pi}{4}$.

- Arg$(1+i) = \frac{\pi}{4}$ d'où Arg$\left(\frac{Z_{A'}-Z_w}{Z_A-Z_w}\right) = $ Arg$(1+i) = \frac{\pi}{4}$
- $\frac{WA'}{WA} = \frac{|-3-3i|}{|-3|} = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$ et $|1+i| = \sqrt{2}$ d'où $\frac{WA'}{WA} = |1+i| = \sqrt{2}$

On conclue que f est une similitude de centre W de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$

RESUME :

1- TRANSFORMATIONS DU PLAN ET BIJECTION DANS ℂ

Soit f une transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'.

On peut associer à f une fonction et une seule définie sur ℂ par : $f: z \longmapsto f(z) = z'$.

L'écriture $z' = f(z)$ est une écriture complexe de f. On dit alors que la transformation f a pour écriture complexe associée $z' = f(z)$ ou alors que la transformation f a pour bijection associée f : ℂ ⟶ ℂ

$z \longmapsto z'$

2- TRANSFORMATIONS ÉLÉMENTAIRES DU PLAN

La symétrie de centre O a pour écriture complexe $z' = -z$.

La symétrie d'axe (OI) a pour écriture complexe $z' = \bar{z}$.

La symétrie d'axe (OJ) a pour écriture complexe $z' = -\bar{z}$.

La translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe b a pour écriture complexe $z' = z + b$.

La rotation de centre O d'angle Θ a pour écriture complexe $z' = e^{i\Theta}z$.

L'homothétie de centre O et de rapport K a pour complexe $z' = kz$.

La rotation d'angle orienté Θ de centre Ω d'affixe w a pour écriture complexe $z' = e^{i\Theta}(z-w) + w$.

Remarque : si $z' = az + b$ est l'écriture complexe d'une rotation d'angle orienté ϴ de centre Ω d'affixe w, alors $|a| = 1, Arg(a) = \Theta\ et\ w = \frac{b}{1-a}$ avec a un nombre complexe.

L'homothétie de centre Ω d'affixe w et de rapport k a pour écriture complexe $z' = (z - w) + w$.

Remarque : si $z' = kz + b$ est l'écriture complexe d'une homothétie de centre Ω d'affixe w et de rapport k, alors $w = \frac{b}{1-a}$

Exemple soit la transformation f du plan d'écriture complexe $z' = az + 1 + 2i$.

a- Déterminer les valeurs de a pour les quelles f est une homothétie et pour préciser le centre et le rapport de f pour a=5.

b- Déterminer la valeur de a pour que f soit une rotation d'angle $\frac{\Pi}{3}$ et préciser son centre.

c- Déterminer la valeur de a pour la quelle f est une symétrie et préciser son centre.

d- Déterminer la valeur de a pour la quelle f est une translation et préciser l'affixe de son vecteur de translation.

3- SIMILITUDES DIRECTES DU PLAN.

a- Définition :

Soit k un nombre réel strictement positif. On appelle similitude de rapport k toute transformation du plan dans le plan tel que pour tout point M et N d'images respectives M' et N', on a M'N'=K.MN.

Toute similitude de rapport k est la composée d'une isométrie et d'une homothétie de rapport k. Réciproquement, si k est un nombre réel, toute composée d'une isométrie et d'une homothétie de rapport k est une similitude de rapport $|k|$.

b- Similitude directe.

Soit k un réel strictement positif, on appelle similitude directe de rapport k toute similitude qui conserve l'orientation des angles.

NB : une similitude directe n'est rien d'autre que : Une translation, une rotation, une homothétie, la composée d'une rotation et d'une homothétie.

c-Similitude indirecte.

On appelle similitude indirecte de rapport k toute similitude qui ne conserve pas l'orientation des angles.

Propriétés :

1- Toute similitude directe de rapport k est associée à une bijection complexe f définie par $f(z) = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}\ et\ |a| = k$.

Réciproquement, toute bijection complexe f définie par $f(z) = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}\ et\ |a| = k$, est associée à une similitude directe S de rapport $|a|$.

2- Toute similitude directe S de rapport k>0 qui n'est pas une translation admet un unique point invariant Ω et s'écrit de manière unique $S = h(\Omega, k)\circ r(\Omega, \Theta)$ ou $S = r(\Omega, \Theta)\circ h(\Omega, k)$.

Le point Ω est appelé centre de S, k son rapport et Θ son angle orienté. On peut ainsi caractériser S par Ω, Θ et k. On peut donc écrire $S(\Omega, k, \Theta)$.

c- <u>Expression analytique d'une similitude</u>.

Pour déterminer l'expression analytique d'une application du plan dans lui-même d'expression complexe donnée, on peut poser $Z' = x' + iy'$, $z = x + iy$ et applique l'égalité entre deux nombres complexes.

Exercice d'application :

Soit le plan P rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On considère la transformation f de P dans P qui à tout point M d'affixe Z=x+iy associe le point M' d'affixe $Z' = x' + iy'$ $tel\ que$ $Z' = (1 - i)Z + 2 - i$.

1- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.
2- Donner l'expression analytique de f.
3- Soit la droite $(D): x + 2y = 0$. Déterminer l'image de la droite (D) par f.

Module 25	RELATIONS ET OPERATIONS FONDAMENTALES DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES REELS

CHAPITRE 6

FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

INTERET : Dans la pratique, les fonctions logarithmes permettent en sciences expérimentales de remplacer la mesure d'une grandeur par le logarithme de sa mesure, en arithmétiques de trouver le nombre de chiffres dans l'écriture d'un entier en base 10

MOTIVATION. Nous sommes confrontés chaque jour à résoudre des problèmes d'intérêts, de rabais ou de hausses faisant appel à la résolution des équations de la forme $a^n = b$ $(a, b \in \mathbb{N}^* et\ n \in \mathbb{N})$, ou de trouver les primitives des fonctions dont la dérivée est sous la forme $\frac{f\prime(x)}{f(x)}$ $(f(x) \neq 0)$. Le présent chapitre s'en va nous donner des outils mathématiques pour mieux appréhender ce type de problème.

PREREQUIS continuité et dérivabilité d'une fonction sur un intervalle

LEÇON 1

Définition, présentation et résolution des équations à laide de la fonction logarithme

Durée : 100 minutes

COMPETENCES

L'élevé doit être capable de :

- Justifier qu'une fonction est la primitive d'une autre sur un intervalle
- Savoir résoudre les équations sous la forme $a^n = b(a, b \in \mathbb{N}^* et\ n \in \mathbb{N})$ ainsi que toutes les équations ayant la fonction logarithme
-

SITUATION PROBLEME

Lors de la préparation de son baccalauréat, clément un élève de terminale C affirme que$\forall x \in]0; \rightarrow[$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ admet des primitives sur $]0; \rightarrow[$ et parmi elles il y a une et une seule qui prend la

valeur 0 en 1. Son père M NOAH décide de lui faire une surprise en plaçant dans une banque (intérêt composé annuel de 6%) de la place un capital de C_0=1000000 le 1 er janvier 2019 pour lui offrir une Toyota yaris qui coute 2200000 FCFA. Aide clément à justifier son point de vue.

En quelle année son père pourra-t-il réaliser cette opération ?

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

1) Montre que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur l'intervalle $]0; \rightarrow[$, à l'aide de ta calculatrice, calcule ln1.
2) a)Soit C_i le capital de M NOAH à l'année$2019 + i$, exprime C_1 puis C_2 en fonction de C_0 ,puis donne une conjecture de C_n en fonction de C_0 à l'année $2019 + n$

   b) Pose $C_n = 2200000$ Puis , à l'aide de ta calculatrice, effectue l'opération

   n=$\frac{\ln(\frac{2200000}{C_0})}{\ln(1{,}06)}$

Solution de la situation problème et de l'activité

1) la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur l'intervalle $]0;\to[$ comme quotient des fonctions $x \mapsto 1$; $x \mapsto x$;qui elles sont continuent sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $]0;\to[$,donc clément a raison de dire que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ admet des primitives sur $]0;\to[$,celle qui s'annule en 1 est $la\ fonction\ ln$
2) $C_1 = C_0 + 0.06C_0 = (1.06)C0;\ \ C_2 = C_1 + 0.06C_1 = (1.06)C_1 = (1.06)^2C_{0.}$ Ainsi par conjecture,$C_n = (1.06)^nC_0$, donc après calcul, M NOAH pourra réaliser cette opération à la 14^e année (n≈14)

RESUME

I) DEFINITION ET PROPRIETE

1) DEFINITION

On appelle fonction logarithme népérien, la primitive sur l'intervalle $]0;\to[$de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ notée ln et prenant la valeur 0 en 1

CONSEQUENCE

- $\forall x \in\ ]0;\to[,\ (lnx)' = \frac{1}{x}$
- $ln:]0;\to[\ \to \mathbb{R}$
  $x \longrightarrow lnx$

  $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$ où e est la base logarithme népérien

REMARQUE

$\forall x \in\ ]0;1[\ ,lnx < 0$ et $\forall x \in\ ]1;\longrightarrow[, lnx > 0$

2) PROPRIETES

P1) Domaine de définition .Soit U une fonction définit sur son domaine de définition,

- $ln\big(U(x)\big)\ existe$ si et seulement si $U(x) > 0$
- $ln|U(x)|\ existe$ si et seulement si $U(x) \neq 0$

P2) pour tous les nombres réels a et b strictement positifs on a

- $\ln(ab) = lna + lnb$;
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -lna$;
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = lna - lnb$;
- $\ln(a^n) \quad = nlna$;
- $lna = lnb \Leftrightarrow a = b$;
- $lna \leq lnb \Leftrightarrow a \leq b$;
- $ln\ (e^a) = a = e^{lna}$

II- EQUATIONS ET INEQUATIONS COMPORTANT ln

METHODE

Pour résoudre les équations (resp les inéquations) comportant, on procède comme suit :

- On détermine l'ensemble de validité (contrainte sur l'inconnue)
- On transforme l'équation (resp l'inéquation) sous la forme $lna = lnb \Leftrightarrow a = b$, (resp $lna \leq lnb \Leftrightarrow a \leq b$)
- On résout l'équation (resp l'inéquation) et on détermine l'ensemble solution en tenant compte de l'ensemble de validité.

NB : on pourra faire un changement de variable dans certain cas en posant $X = lnx$.

EXERCICE D'APPLICATION

1) Donner le domaine de définition des fonctions suivantes

   $a)\ f(x) = \ln(x+4)\ ; b) g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-3}\right)\ ; c) h(x) = \ln(|x^2 - 9|)$

   $d)\ k(x) = \frac{-3x+2}{x+2} + \ln(x+1)$

2) Ecris plus simplement

$A = 2ln3 - \ln 5 + \frac{1}{2}ln9$; $B = \ln(0{,}01) + \ln(100) - \ln(0{,}0001)$;

$C = 3ln2 - ln16 + \ln\left(\frac{1}{2}\right)^5 + ln32$

3) Détermine le plus petit entier naturel n tel que $2^n \geq 10^9$
4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a) $lnx = 2$; $\ln(x+2) = 5$; $\ln(x-3) + \ln(x-1) = 3ln2$;

$\ln[(x-3)(x-1)] = 3ln2$

b) $\ln(2x^2 + 5x - 2) \leq 0$; $\left(ln(x+1)\right)^2 - \ln(x-6) > 0$

5) résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, (S): $\begin{cases} \ln x + lny = ln\left(\frac{2}{3}\right) \\ x + y = \frac{7}{3} \end{cases}$

Solution de quelques exercices d'application

1) Donner le domaine de définition des fonctions suivantes

$a)\ f(x) = \ln(x+4)$, f $existe\ ssi\ x + 4 > 0 \Rightarrow x > -4, donc\ Df =]-4;\ +\infty[$

2) Ecris plus simplement $A = 2ln3 - \ln 5 + \frac{1}{2}ln9$;$A = 2ln3 - ln5 + \frac{1}{2}ln3^2$ $=$

$2ln3 - ln5 + \frac{2}{2}ln3 = 2ln3 - ln3 + ln5 = ln3 + ln5$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a) $lnx = 2 \Rightarrow x = e^2$; $\ln(x+2) = 5 \Rightarrow x + 2 = e^5 \Rightarrow x = e^5 - 2$

$\ln(2x^2 + 5x - 2) \leq 0 \Rightarrow 2x^2 + 5x - 2 \leq e^0 \Rightarrow 2x^2 + 5x - 3 \leq 0$;$\triangle = (5)^2$-4(2)(-3)= 49 , $x' = -3; x'' = \frac{1}{2}, s = \left[-3; \frac{1}{2}\right]$

TAFAD Choisir 3 à 5 exercices du livre au programme

LEÇON 2

Etude des fonctions logarithmes

Durée : 100 minutes

COMPETENCES

L'élevé doit être capable de :

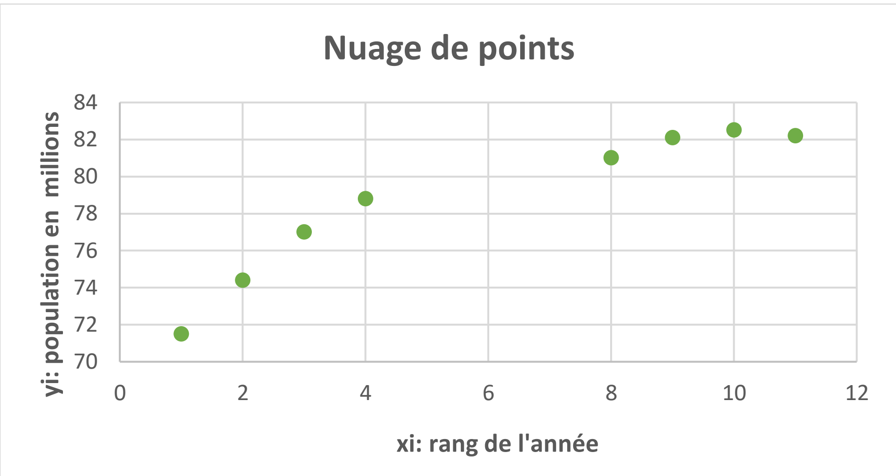
- Connaitre les propriétés et les limites classiques de la fonction logarithme népérien.
- Justifier la dérivabilité de $\ln(U)$ et calculer sa dérivée.
- Etudier et représenter la fonction $\ln(U)$ et certaines autres fonctions
- Trouver la primitive des fonctions dont la dérivée est sous la forme $\frac{U'}{U}$.

SITUATION PROBLEME

On étudie ci-dessous l'évolution de la population de l'Allemagne sur une période plus étendue (à partir de 1990) (Allemagne réunifié).

Année	1958	1963	1968	1973	1993	1998	2003	2008
Rang de l'année X_i $1<i<11$	1	2	3	4	8	9	10	11
Population de l'Allemagne Y_i en millions d'habitants $1<i<11$	71,5	74,4	77	78,8	81	82,1	82,5	82,2

Ces données sont représentées par le nuage de points ci-dessous :



Ces points ont l'allure de la courbe de quel type de fonction ?

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

Soit la fonction f définie par $f(x) = lnx$.

1) a) Remplir le tableau de valeur suivante à l'aide d'une calculatrice :

x	-4	-1	0	0,3	0,75		e	4
$f(x) = lnx$						0		

b) que constate-t-on pour $x \leq 0$?

c) que peut-on dire du signe de $f(x)$ pour $x \in \left]0; 1\right[$? Pour $x > 1$?

2) A partir du tableau ci-dessus, construire une partie de la courbe de f sur $]0; 4]$. En déduire le signe de f' sur $]0; 4]$.

3) Calculer $f(0{,}0001)$; $f(999)$ puis conjecturer une limite de f en 0 et en $+\infty$. Déduire un tableau de variation de f sur $]0; +\infty[$.

Solution de la situation problème et de l'activité

Soit la fonction f définie par $f(x) = lnx$.

1) a)

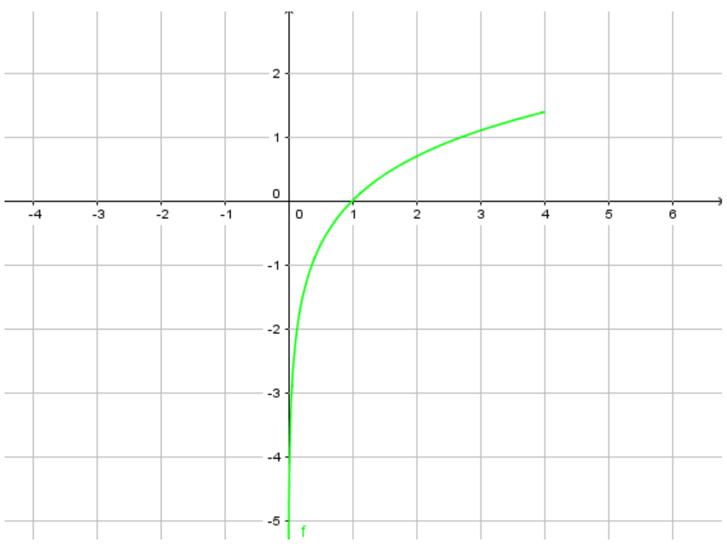
x	-4	-1	0	0,3	0,75	1	e	4
$f(x) = lnx$	Error	Error	Error	-1,20...	-0.28...	0	1	1.38…

b) on constate que pour $x \leq 0$, $f(x)$ n'existe pas.

c) on peut dire que $f(x)$ est négative pour $x \in \left]0; 1\right[$, et, est positive pour $x > 1$.

2) Construction

f est croissante sur $]0; 4]$, donc f' est positive sur $]0; 4]$



3) Calcul $(0{,}0001) = -9{,}2103$; $f(999) = 6{,}90$. conjecture $\lim_{x\mapsto 0^+} lnx = -\infty$ et $\lim_{x\mapsto +\infty} lnx = +\infty$.

Tableau de variation de f sur $]0;+\infty[$.

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

Les points du nuage de la situation problème ont l'allure de la courbe de fonction $\ln(x)$.

RESUME

I) Limites de références

Les limites classiques ou limites de références sont admises :

- $\lim_{x\mapsto 0^+} lnx = -\infty$
- $\lim_{x\mapsto +\infty} lnx = +\infty$
- $\lim_{x\mapsto +\infty} \frac{lnx}{x} = 0$
- $\lim_{x\mapsto 1} \frac{lnx}{x-1} = 1$
- $\lim_{x\mapsto 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$
- $\lim_{x\mapsto 0^+} xlnx = 0$

Pour tous nombres réels $\alpha > 0$,

on a :

- $\lim_{x\mapsto 0^+} x^\alpha lnx = 0$
- $\lim_{x\mapsto +\infty} \frac{lnx}{x^\alpha} = 0$

Exemple : calculons les limites suivantes :

1) $\lim_{x\mapsto +\infty} \ln(x - lnx)$ 2) $\lim_{x\mapsto 0^+} \left(lnx + \frac{1}{x}\right)$ 3) $\lim_{x\mapsto +\infty}(2x^2 + 2lnx - 3)$

4) $\lim_{x\mapsto 0^+} \left(lnx - \frac{1}{x}\right)$

Solution : 1) $\lim_{x\mapsto+\infty}\ln(x-lnx)=\lim_{x\mapsto+\infty}\ln(x(1-\frac{lnx}{x}))$ or $\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{lnx}{x}=0$

d'où$\lim_{x\longmapsto+\infty}(1-\frac{lnx}{x})=1$ ainsi $\lim_{x\longmapsto+\infty}x(1-\frac{lnx}{x})=+\infty$

donc $\lim_{x\mapsto+\infty}\ln(x-lnx)=\lim_{x\mapsto+\infty}\ln\left(x\left(1-\frac{lnx}{x}\right)\right)=+\infty$

II) Etude de la fonction $x\longmapsto lnx$

$f(x)=lnx$

Domaine de définition : $D_f=]0;+\infty[$

Limites : $\lim_{x\longmapsto0^+}f(x)=\lim_{x\longmapsto0^+}lnx=-\infty$; et ; $\lim_{x\longmapsto+\infty}f(x)=\lim_{x\longmapsto+\infty}lnx=+\infty$

Dérivée et sens de variation : ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall x\in]0;+\infty[$, $f'(x)=\frac{1}{x}>0$.

Donc la fonction ln est strictement croissante.

Tableau de variation :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

Branche infinie : $\lim_{x\longmapsto+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\longmapsto+\infty}\frac{lnx}{x}=0$ donc la courbe admet une branche parabolique de direction (OI)

$\lim_{x\longmapsto0^+}f(x)=\lim_{x\longmapsto0^+}lnx=-\infty$ Donc la droite $x=0$ est asymptote verticale à la courbe de f

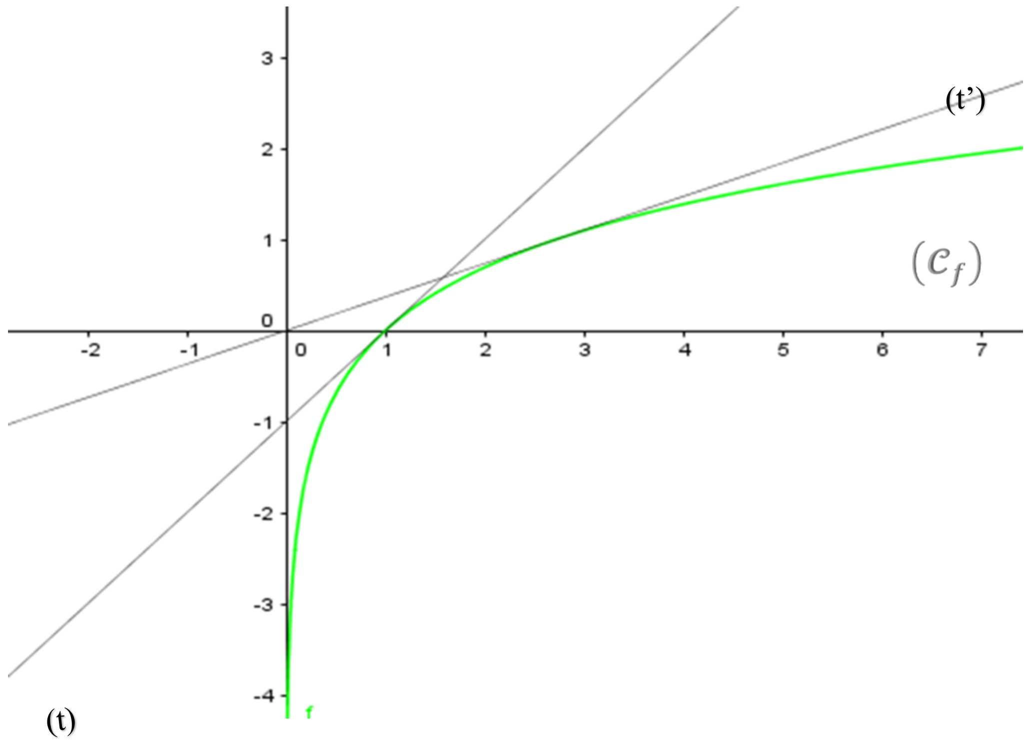
Points d'intersection avec les axes : $f(x)=0\Leftrightarrow x=1$ donc la courbe de f coupe l'axe des abscisses en $I\binom{1}{0}$; $f(e)=lne=1$ avec $e\approx2{,}72$

Equations des tangentes aux points $I\binom{1}{0}$ et $A\binom{e}{0}$

$(t):y=ln'(1)(x-1)+ln1;$; $\qquad$ $(t'):y=ln'(e)(x-e)+lne$

$(t): y = x - 1$ $\quad$ $(t'): y = \frac{1}{e}x$

Construction de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f :



III) Dérivée et primitive

1) Dérivée

Propriété : soit U une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I. la fonction $\ln(U)$ est dérivable sur I et on a : $(ln(U))' = \frac{U'}{U}$

NB : $(ln|U|)' = \frac{U'}{U}$

Exemple : déterminons les dérivées des fonctions suivantes :

$a)\ f(x) = lnx + \ln(x-4)$; $b)\ g(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$; $c)\ h(x) = ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|$;

$k(x) = \frac{xlnx}{x+2}$

2) Primitive

Propriété : soit U une fonction dérivable et ne s'annulant pas sur un intervalle I.

La fonction $\frac{U'}{U}$ admet pour primitive sur I la fonction $ln|U| + k$, k etant un nombre réel.

Exemple : déterminons les primitives des fonctions suivantes :

$a)\ f(x) = \frac{1}{x}$; $b)\ g(x) = \frac{1}{2x-1}$; $c)\ h(x) = \frac{\cos(x)}{-\sin(x)}$; $d)\ k(x) = \frac{x+3}{x+2}$;

$e)\ U(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$

IV) Etude d'une fonction comportant ln

On considère la fonction f définit de ℝ vers ℝ par : $f(x) = \frac{x+ln|1-x|}{1-x}$

1. Etudier les variations de f.
2. On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$. Démontre que (C) admet un centre de symétrie dont on précisera les coordonnées.
3. Construire (C).

TAFAD Choisir 3 à 5 exercices du livre au programme

LECON 3 : LOGARITHME DE BASE a — *durée : 100 minutes*

COMPETENCES

L'élevé doit être capable de :

- Connaitre la définition et les propriétés de la fonction logarithme de base a.
- Etudier une fonction logarithme de base a.

SITUATION PROBLEME

Abdoul, un étudiant de T[le] C veut déterminer le pH d'une solution d'acide chlorhydrique de concentration C = 10^{-3} mol/L .Son enseignant lui dit qu'en chimie le pH d'une solution est déterminé par l'expression $\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H_3O^+}]$. C'est quoi log ?

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

1) en utilisant la calculatrice, compare les résultats des deux tableaux suivants :

x	1	5,2	10^{-3}
$\log(x)$			

x	1	5,2	10^{-3}
$\frac{\ln(x)}{\ln(10)}$			

2) sachant que , calculer $\log_2(4)$; $\log_4(10)$; $\log_{2,5}(8{,}9)$.

Solution de la situation problème

$\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H_3O^+}] = -\log[10^{-3}]$=3

RESUME

I. Définition et propriété

Définition : soit $a \in]0;1[\cup]1;+\infty[$ on appelle logarithme de base a la fonction notée log_a et définie par $\log_a(x) = \frac{lnx}{lna}$

Remarque : R_1 : si $a = e$, alors $\log_e(x) = \frac{lnx}{lne} = lnx$

R_2 : si $a = 10$, alors $\log_{10}(x) = \frac{lnx}{ln10} = \log(x)$ (logarithme décimal)

Propriétés : le logarithme de base a possède les mêmes propriétés que la fonction logarithme népérien.

Pour tout réel a strictement positif, $\forall x \in]0; +\infty[$ et $r \in \mathbb{Q}$, on a :

- $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
- $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
- $\log_a(x^r) = r\log_a(x)$
- $\log_a(x) < \log_a(y) \Leftrightarrow \begin{cases} x < y \; si \; a \in]1; +\infty[\\ x > y \; si \; a \in]0; 1[\end{cases}$

II. Etude de la fonction $x \longmapsto \log_a x$ avec $a > 0$ et $a \neq 1$

$log_a :]0\,; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Limites : -$\lim_{x \to 0^+} \log_a(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \begin{cases} -\infty & si \; a \in]1; +\infty[\\ +\infty & si \; a \in]0; 1[\end{cases}$

- $\lim_{x \to +\infty} \log_a(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \begin{cases} +\infty & si \; a \in]1; +\infty[\\ -\infty & si \; a \in]0; 1[\end{cases}$

Dérivée : $\log_a(x)$ est dérivable sur son domaine de définition et

$$(\log_a(x))' = \left(\frac{ln(x)}{ln(a)}\right)' = \frac{1}{xln(a)}$$

Le signe de $(\log_a(x))'$ dépend de $\ln(a)$.

- Si $a \in]0; 1[$, $\ln(a) < 0 \Rightarrow (\log_a(x))' < 0$ donc $\log_a(x)$ est décroissante
- Si $a \in]1; +\infty[$, $\ln(a) > 0 \Rightarrow (\log_a(x))' > 0$ donc $\log_a(x)$ est croissante

Tableau de variation :

Cas $a \in]0;1[$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

Cas $a \in]1;+\infty[$

x	1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

EXERCICE D'APPLICATION

1) Ecrire plus simplement : $A = 2\log_5(3) - \log_5(7) + \frac{1}{2}\log_5(9)$

$$B = \log_3(0{,}003) + \log_3(300)$$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$:

   $a)$ $\log_2(2x-5) = 0$; $b)$ $\log_7(3x-2) + \log_7(x+3) = \log_7(2x+1)$

   $c)$ $\log_4(x-2) \leq 3$; $d)$ $(\log_2(x+1))^2 + \log_2(x+1) - 6 > 0$

3) Construire les courbes des fonctions $\log_{\frac{1}{2}}(x)$ et $\log_2(x)$

TAFAD Choisir 3 à 5 exercices du livre au programme

Module 25	RELATIONS ET OPERATIONS FONDAMENTALES DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES REELS

CHAPITRE 6

FONCTIONS EXPONENTIELLES NEPERIENNES ET PUISSANCES

OBJECTIFS PEDAGOGIQUE: Connaître les définitions des fonctions puissance, exponentielle, et leurs principales propriétés. Savoir faire des calculs impliquant ces fonctions. Identifier les cas de figure dans lesquels il est pertinent de les utiliser **étudier et représenter une fonction exponentielles népériennes et puissances**

MOTIVATION : De nombres phénomènes économiques et sociales présentes une croissance assez forte. On se propose de rechercher des critères mathématiques pour étudiez ces croissances.

INTERET : en économie, La fonction exponentielle permet donc de calculer la valeur d'une somme placé à un taux d'intérêt quand les intérêts sont composés en continu. Les fonctions puissance permettent de modéliser un grand nombre de phénomènes économiques mettant en jeu une croissance (ou une décroissance) régulière. La fonction exponentielle est utile pour modéliser une croissance (ou décroissance) régulière rapide.

résolutions des équations faussant intervenir les fonctions ln et aussi le calcul des limites, dérivées étudier et représenter les fonctions $\boldsymbol{logarithmique}$

LEÇON 1

Fonctions exponentielles népériennes et puissances

Durée : 50 minutes

Compétences à acquérir par les élèves : Connaître les définitions des fonctions puissance, exponentielle, et leurs principales propriétés. Savoir faire des calculs impliquant ces fonctions. Identifier les cas de figure dans lesquels il est pertinent de les utiliser **étudier et représenter une fonction exponentielles népériennes et puissances**

CONTROLE DES PRE-REQUIS :

- ✓ Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de $ln3\ et\ ln5$: $\boldsymbol{ln15}$; $\boldsymbol{ln45}$; $\boldsymbol{ln75\sqrt{5}}$
- ✓ Déterminer l'ensemble de définition des fonctions:
- ✓ $\boldsymbol{f(x) = ln(x-2)}$; $\boldsymbol{g(x) = ln(x-2) + ln(9-2x)}$
- ✓ Résoudre dans R les équations : $\mathbf{ln(-3x) = ln(x^2-4)}$; $\boldsymbol{3(lnx)^2 - 2lnx - 16 = 0}$

Solution du contrôle des prérequis :

- ✓ $Ln15 = ln(5x3) = \boldsymbol{ln5 + ln3}$
- ✓ F(x) existe si et seulement si $x - 2 > 0 \leftrightarrow x > 2$ donc $D_f =]2;+\infty[$. de même g(x) existe si et seulement si $x - 2 > 0\ et\ 9 - 2x > 0 \leftrightarrow x > 2\ et\ x < \frac{9}{2}$ donc $D_g = \left]2;\frac{9}{2}\right[$
- ✓ pour résoudre l'équation : $\ln(-3x) = \ln(x^2-4)$, on doit avoir : $D_V =]-\infty;-2[$ et on a alors : $-3x = x^2 - 4 \leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$. $\Delta = 25 = 5^2$; $x_1 = -4\ et\ x_2 = 1 \notin D_V$ donc $\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{-4}\}$

  Pour l'équation : $3(lnx)^2 - 2lnx - 16 = 0$ on pose $\boldsymbol{X = lnx}$ et l'équation devient alors : $3X^2 - 2X - 16 = 0$ et $\Delta = 196 = 14^2\ et\ X_1 = -2;\ X_2 = \frac{8}{3}$ en revenant au changement de variable, on a : $e^{lnx_1} = e^{-2} \leftrightarrow x_1 = e^{-2}\ et\ e^{lnx_2} = e^{\frac{8}{3}} \leftrightarrow x_2 = e^{\frac{8}{3}}$ donc on a alors : $\boldsymbol{S} = \left\{\boldsymbol{e^{-2}; e^{\frac{8}{3}}}\right\}$

1.1) Situation problème

On admet, lorsqu'on injecte dans le sang une dose A d'un médicament qu'il reste dans le sang à la date t, après élimination naturelle la quantité $\boldsymbol{Ae^{-\frac{t}{24}}}$ de médicament. L'unité de temps est l'heure ; l'origine du temps est l'instant de l'injection ; l'unité de volume est le cm3.dire quelle quantité de médicament reste-t-il 8 heures après l'injection. On injecte une dose A toutes les $\boldsymbol{8\ heures}$. Apres avoir représentez graphiquement la quantité de médicament contenue dans le sans pendant les $\boldsymbol{64\ heures}$ qui suivent la première injection et en admettant que le médicament est efficace lorsque le sang véhicule une quantité au moins égale à $\boldsymbol{2,2A}$; indique partir du graphique l'instant a partir duquel le médicament sera efficace.

1.2) Activité d'apprentissage

Soit la fonction f définie par $f(x) = e^x$ $(exponentielle\ x)$ tel que $e^1 = 2{,}718$

1) En utilisant la calculatrice, Compléter le tableau de valeurs de la f ci-dessous a 0,01 près

x	**-5**	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**
$\boldsymbol{f(x) = e^x}$						

2) Que peut-on dire du signe de $f(x)$ pour $x < 0$ puis pour $x > 0$? En déduire le signe de $f(x)$.

3) A partir du tableau de valeur ci-dessus Construire une partie de la courbe de f ci-dessus sur $[-5; 2]$

4) En déduire le signe de la dérivée f' sur $[-5; 2]$ puis dresser le tableau de variation de f sur $[-5; 2]$

5) Etablir le tableau de signe de **f.**

Solution de l'activité d'apprentissage:

1) Complétons le tableau :

x	-5	-2	-1	0	1	2
$f(x) = e^x$	0,01	0,14	0,37	1,00	2,72	7,39

2) Nous pouvons en déduire que pour tout $x < 0$, f est positive et pour tout $x > 0$, f est positive donc on peut conclure que pour tout x appartenant a R, f est positive

3) Construisons la courbes en plaçant les points de coordonnées $\binom{x}{e^x}$ dans le repere et relier tous ces points par une courbe

4) Puis que f est croissante dans $[-5; 2]$ alors f' est positive dans cet intervalle

5) Tableau de signe de f :

x	$-$ $+\infty$ ∞

$f(x)$	$+$

1.3) RESUME

a) Définition

La fonction logarithme népérien est continu et strictement croissante sur $]0;\,+\infty[$ et l'image de l'intervalle $]0;\,+\infty[$ par la fonction $\boldsymbol{ln}$ est égale a IR, donc la fonction $\boldsymbol{ln}$ realise une bijection de $]\mathbf{0};\,+\infty[$ **vers IR**

La fonction exponentielle note $\boldsymbol{exp}$ est la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien. Par conséquence, la fonction $\boldsymbol{exp}$ est définie sur $IR\ par$

$$\boldsymbol{exp}(\boldsymbol{x}):\begin{cases}\boldsymbol{R} \to]\mathbf{0};+\infty[\\ \boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{exp}(\boldsymbol{x})\end{cases}$$

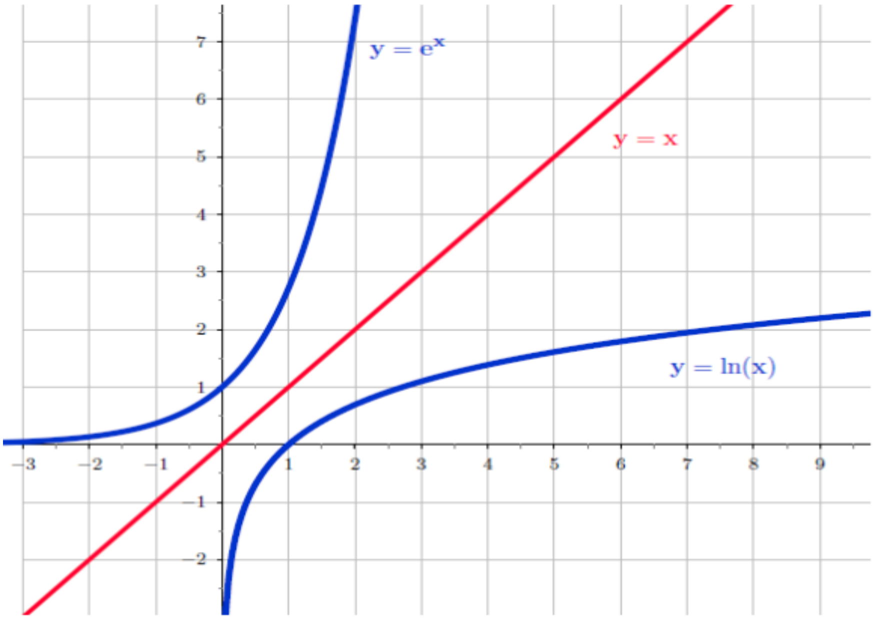
Notations : ∀x∈ IR, on pose $e^x = exp(x)$.

Proposition :

- $\mathbf{D}_{\mathbf{exp(x)}} = \mathbf{IR}$
- $\forall\, x\ \in IR,\ \mathbf{ln}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}\ \ \Rightarrow \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{ln})^{-\mathbf{1}}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{exp}(\boldsymbol{x})$**.** On convient d'étendre cette égalité à tout nombre réel x

Conséquence immédiates

- $\forall\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{IR}, \forall\ \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{IR}^*{}_+,\ \ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}} \Leftrightarrow \mathbf{ln}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}$
- $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{IR},\ \ \boldsymbol{lne}^{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}$
- $\forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{IR}_+^*;\ \boldsymbol{e}^{\mathbf{ln}(\boldsymbol{y})} = \boldsymbol{y}$
- $\boldsymbol{de}\ \mathbf{ln}(\mathbf{1}) = \mathbf{0}\ \boldsymbol{et}\ \mathbf{ln}(\boldsymbol{e}) = \mathbf{1}, \boldsymbol{on\ a}: \boldsymbol{e}^{\mathbf{0}} = \mathbf{1}\ \boldsymbol{et}\ \boldsymbol{e}^{\mathbf{1}} = \boldsymbol{e}$
- $\boldsymbol{x} \mapsto \mathbf{exp}(\boldsymbol{x})$ varie dans le même sens que sa bijection $\boldsymbol{ln}(\boldsymbol{x})$. Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions $\boldsymbol{ln}(\boldsymbol{x})\ et\ \boldsymbol{exp}(\boldsymbol{x})$ sont symétrique par rapport à la première bissectrice. (Tracer la courbe des deux fonctions dans le même repère)



b) Propriétés fondamentale

- Pour tous nombres réels a et b, on a : $\mathbf{e^{a+b} = e^a \times e^b}$

c) Propretés

P1) $\forall\, a \in IR, e^{-a} = \frac{1}{e^a}$ ***Exple :*** $\boldsymbol{e^{-2} = \frac{1}{e^2}}$

P2) $\forall\, \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{IR},\ \mathrm{e}^{(a-b)} = \frac{e^a}{e^b}$

P3) $\mathbf{e^{a_1+a_2+a_3+\cdots+\cdots+\,a_n} = e^{a_1} \times e^{a_2} \times e^{a_3} \times \ldots \ldots \times e^{a_n}}$

P4) $\boldsymbol{e^{pa} = (e^a)^p}$ ***ou*** $\mathbf{exp(nx)=(exp(x))^n}$ **Exple ;** $\mathbf{e^{2x} = (e^x)^2}$

P5) $\mathbf{e^a = e^b \Rightarrow a = b}$ **Exple :** $\boldsymbol{e^{(2x+1)} = e^{3x} \Longmapsto 2x + 1 = 3x \Longmapsto x = 1}$

P6) $\boldsymbol{e^a \le e^b \Rightarrow a \le b}$ ***Exple :*** $\boldsymbol{e^{(4x-1)} \le e^{3x} \Longmapsto 4x - 1 \le 3x \Longmapsto x \le 1}$

d) Exercice d'application

Exercice 1 :

Résoudre dans IR les équation et inéquations suivantes :

a) $e^{-3x+1} = 1$

b) $e^{2x} - 3e^x = -2$

c) $e^{-x} - 12e^x - 1 = 0$

d) $\mathbf{2e^{2x+1} - 3e^{x+1} - 4e^x \ge 0}$

e) $\mathbf{\frac{2e^x+1}{e^x-2} \le 0}$

f) resourdre dans IR^2 les systemes suivants

$\begin{cases} 2e^x - 3e^y = 7 \\ -e^x + 2e^y = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} \ln\left(\frac{x}{y^2}\right) - \ln(2) = 0 \\ \frac{e^x}{e^5} = (\frac{1}{e^y})^3 \end{cases}$ $\begin{cases} e^{xy} + e^x = 10 \\ (e^x)^{y+1} - 5e^x = 6 \end{cases}$

g) Résoudre les systèmes suivant :

a) $\begin{cases} xy = -15 \\ e^x e^y = e^{-2} \end{cases}$ **;** **b)** $\begin{cases} 2e^x - 3e^y + e^z = -4 \\ 3e^x - 2e^y - e^z = -1 \\ e^x + e^y + e^z = 3 \end{cases}$ **;** **c):**

$\begin{cases} 4e^{2x+1} - e^{-y} = 2 \\ -e^{2x+1} + 2e^{-y} = -3 \end{cases}$

Exercice 2:

On considère la fonction polynôme définie par **:** $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

1- Résoudre l'équation $P(x) = 0$

2- En déduire dans R les solutions des équations et inéquations suivantes

a- (E_1): $(lnx)^3 - (lnx)^2 - 4lnx + 4 = 0$

b- (E_1): $e^{3x} - e^{2x} - 4e^x + 4 = 0$

c- (I_1) : $(lnx)^3 - (lnx)^2 - 4lnx + 4 > 0$

d- (I_2) : $e^{3x} - e^{2x} - 4e^x + 4 \leq 0$

LEÇON 2

Etude de la fonction exponentielle

Durée : 50 minutes

Motivation : cette leçon nous permet d'étudier les fonctions exponentielles et associées et résoudre également les problèmes faisant intervenir les fonctions exponentielles

Compétences à acquérir par les élèves : savoir étudier et représenter les fonctions exponentielles ainsi que les problèmes associés

Pré-requis :

- ✓ Dans chacun des cas suivants, calculer les limites de f aux bornes de l'intervalle I :
  $f(x) = \frac{1}{lnx}\ avec\ I =]1; +\infty[$; $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)\ avec\ I =]-\infty; -1[$
- ✓ Déterminer la dérivée de f dans chacun des cas suivants : $f(x) = \ln(1 + x^2)$;
  $f(x) = \ln(lnx)$

Solution du contrôle des pré-requis :

- ✓ Pour $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{lnx}}$ on a: $\boldsymbol{\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{lnx}\right)} = +\infty$; $\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(\frac{1}{lnx})} = 0$ et pour $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$ on a :
  $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)\right] = 0$; $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left[\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)\right] = -\infty$
- ✓ Déterminons la dérivée : pour : $f(x) = \ln(1 + x^2)$ on a ; $f'(x) = \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} = \frac{2x}{1+x^2}$ et pour $f(x) = \ln(lnx)$ on a : ; $f'(x) = \frac{(lnx)'}{lnx} = \frac{\frac{1}{x}}{lnx} = \frac{1}{xlnx}$

2.1) Situation problèmes :

Le nombre d'habitants d'une région ayant un fort taux de natalité est donné par la fonction exponentielle : $\boldsymbol{f: t \to 12e^{0,05t}}$ ou f(t) est la population exprimé en millions d'habitants pour l'année $2000 + $t. Dire a partir de quelle date la population aura-t-elle plus que triplé ? Cette région ne peut pas nourrir plus de 20 millions de personnes. Pendant combien d'année après 2000 la nourriture sera-t-elle suffisante ?

2.2) Activité d'apprentissage

Soit g la fonction définie sur $\boldsymbol{I = [1; 20[}$ par: $\boldsymbol{f(x) = 12e^{0,05x}}$

1) Calcul les limites de g aux bornes de I

2) Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation
3) Déduire de ce qui précède le signe de g sur I
4) A partir de combien d'année la population de la situation problème aura-t-elle triplé ?

Solution de l'activité d'apprentissage

1) Calculons les limites aux bornes de I : $f(1) = 12{,}61 \;\; et \;\; \lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to 30}[12e^{0{,}05x}] = 53{,}8$
2) Les variations de g et tableau de variation : $f'(x) = 12 \times 0{,}05e^{0{,}05x} > 0$, donc pout tout x appartenant a I, f(x) est croissante.

x	1 ... 30
$f'(x)$	+
$f(x)$	12,61 ↗ 53,8

3) Déduisons le signe de g sur I. $\forall x \in [1; 20[$, $f(x)$ est positive
4) On résout l'équation f(x)=36 équivaut à $\boldsymbol{e^{0{,}05x} = 3 \Longrightarrow x = \frac{ln(3)}{0{,}05} \approx 22}$

2.3) RESUME

a) Définition

La fonction **ln** est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall\ x\ \in]0; +\infty[$, $(\ln)'(x) \neq 0$ donc la fonction exp est dérivable sur IR. $\forall\ x \in IR$, $(\ln \circ \exp)$(x)=x⇒ $(ln \circ \exp)'(x) = 1$, on sait que $(u \circ v)' = v' \times u' \circ v$ donc on a : $\boldsymbol{(\exp)'(x) \times (\ln)'(\exp) = 1} \Rightarrow \boldsymbol{(exp)'(x) \times \frac{1}{\exp(x)} = 1}$ $donc\ \ (\exp)'(x) = \exp(x)$.

Donc la fonction exponentielle est dérivable sur IR et pour tout x appartenant à IR ;

$\boldsymbol{(exp)'(x) = exp(x)}$

b) Conséquence immédiate

La fonction exponentielle est dérivable en « 0 » et on a :

$\lim_{x\to 0}(\frac{e^x-e^0}{x-0}) = \lim_{x\to 0}(\frac{e^x-1}{x}) = (\exp)'(0) = 1$

Donc on a : $\boldsymbol{lim_{x\to 0}(\frac{e^x-1}{x}) = 1}$

c) Les limites

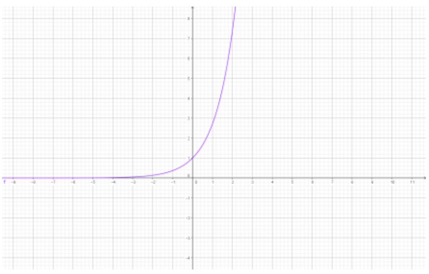
De $\lim_{x\to 0^>} \ln(x) = -\infty$ et de $\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$ on a :

$\mathbf{\lim_{x\to -\infty} e^x = 0}$ **et** $\mathbf{\lim_{x\to +\infty} e^x} = +\infty$, car on a : $\lim_{x\to a} f(x) = b \leftrightarrow \lim_{x\to b} f^{-1}(x) = a$

d) Tableau de variation

La fonction exponentielle est strictement croissante sur IR et on a :

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$ $+\infty$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$
$(\mathbf{exp})'(\boldsymbol{x})$	$+$	$+$	$+$
$\boldsymbol{Exp(x)}$	$\boldsymbol{0}$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{e}$ $+\infty$



Exercice : calculer $\boldsymbol{lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x}}$ $\boldsymbol{et\ lim_{x\to +\infty} xe^x}$

Solution :

$* \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^{\ln x}} = \lim_{x\to+\infty} e^x \times e^{-\ln x} = \lim_{x\to+\infty} e^{x-\ln x} = \lim_{x\to+\infty} e^{x(1-\frac{\ln x}{x})} = +\infty$

$\mathbf{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}} = +\infty$, donc la courbe de la fonction exponentielle admet en $+\infty$ **une branche parabolique** de direction celle de (OJ).

$* \lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}$; Posons $X = -x$ alors

$\begin{cases} X \to +\infty \\ x \to -\infty \end{cases}$ on obtien ; $\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}} = \lim_{X\to+\infty}\frac{-X}{e^X} = \lim_{X\to+\infty}\frac{-1}{\frac{e^X}{X}} = 0$, donc

$\mathbf{\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0}$

e) Exercice d'application

1- Calculer les limites suivantes :

a) $\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty}\frac{3e^x-2}{5e^x+3}}$; ***b)*** $\boldsymbol{\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}}$; ***c)*** $\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{1-e^x}}$

2- Calculer les limites en $+\infty$ ***et*** $-\infty$ des fonctions suivantes :

a) ***f(x)=*** $\boldsymbol{(x^2+1)e^{-x} - x}$ ***;*** ***b)*** $\boldsymbol{g(x) = \frac{e^{2x}-e^x+1}{e^x+1}}$

2.4) Fonction $e^{u(x)}$

a) Dérivée de $e^{u(x)}$

Si u(x) est une fonction dérivable sur un intervalle K, alors $e^{u(x)}$ est dérivable sur K et on a : $\boldsymbol{(e^{u(x)})' = u'(x) \times e^{u(x)}}$

Exemple : calculer la dérivée de la fonction $f: x \mapsto f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

Posons $u: x \mapsto u(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = e^{u(x)}$; $u(x)$ est derivable sur IR^* et on a :

$\forall x \in IR^*, \boldsymbol{f(x)} = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$

b) Primitive de $u'(x)e^{u(x)}$

Si u(x) est une fonction dérivable sur K, alors une primitive de $u'e^u$ sur K est la ***fonction*** $\boldsymbol{e^{u(x)} + K}$ ***avec*** $\boldsymbol{K \in IR^*}$

Exemple : $f: x \mapsto f(x) = xe^{-x^2+1}$. Déterminer une primitive de f sur IR

Posons

$\boldsymbol{u(x) = -x^2+1;\ u'(x) = -2x \to x = -\frac{1}{2}u'(x)}$, la fonction f est sous la forme $f(x) = \frac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$, alors la fonction F: $\boldsymbol{x \mapsto F(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2+1}}$ est une primitive sur IR de f

c) Exercice d'application

Exercice 1

1- Calculer les limites suivantes : *a)* $\lim_{x\to+\infty}(2x^2-1-e^x)$; *b)* $\lim_{x\to 0} 1+e^{\left(1-\frac{1}{x}\right)}$;

c) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-e^x}{3-e^x}$; *d)* $\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{x+1}$; *e)* $\lim_{x\to-\infty} 1+\ln(1+e^x)$

2- Soit : $f(x)=1+\ln(1+e^x)$,

a) Montrer que $f(x)=x+1+\ln(1+e^{-x})$

b) Justifier que la droite d'équation $y=x+1$ est asymptote oblique a C_f en $+\infty$

c) Calculer $f'(x)$ et donner son sens de variation

3- Déterminer les primitives des fonctions suivantes sur leurs domaines de définition :

$f(x)=xe^{x^2-1}$; $g(x)=\frac{e^x}{1+e^x}$; $h(x)=(1+\cos x)e^{x+\sin x}$; $k(x)=3x-\frac{1}{1+x}+e^x$

4- Etudier et représenter la fonction $f(x)=(x-1)e^x$

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère $(0,i,j)$. (C_f) representative de la fonction f définie par $f(x)=(x+1)(e^{-2x}+1)$

1- Soit la fonction numérique g définie par $g(x)=e^{2x}-2x-1$. Etudier les variations de $g(x)$ et en déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x

2- Montrer que tout réel x , $f'(x)=e^{-2x}g(x)$, en deduire ses variation puis dresser son tableau de variation

3- Démontrer la droite (D) d'équation : $y=x+1$ est asymptote à (C_f) et étudier les positions relative de (C_f)et (D)

4- Construire (C_f)et (D)

5- On désigne par h la restriction de f à l'intervalle $]-\infty;\mathbf{0}[$

a- Justifier que h est une bijection de $]-\infty;0[$ vers un intervalle que l'on précisera

b- Dresser le tableau de variation de la bijection réciproque h^{-1} de h, puis tracer sa courbe représentative dans le même repère que (C_f)

LEÇON 3

Fonctions puissances

Durée : 50 minutes

Compétences à acquérir par les élèves : savoir étudier et représenter les fonctions exponentielles ainsi que les problèmes associés

Control des prérequis :

Simplifier les expressions suivantes :

a) $(e^x)^3e^{2x}$

b) $\frac{e^{x-1}}{e^{x-2}}$

c) $\frac{e^{3x}}{(e^{-x})^2 \times e^x}$

d) $\frac{e^x e^y}{e^{x-y}}$

Solution du contrôle des pré-requis

Simplifions les expressions :

a) on a : $(e^x)^3e^{2x} = e^{3x}e^{2x} = e^{(3x+2x)} = e^{5x}$

b) $\frac{e^{x-1}}{e^{x-2}} = e^{x-1} \times e^{-x+2} = e^1$

c) $\frac{e^{3x}}{(e^{-x})^2 \times e^x} = \frac{e^{3x}}{e^{-2x} \times e^x} = \frac{e^{3x}}{e^{-x}} = e^{3x+x} = e^{4x}$

4.1) Situation problème

Une organisation humanitaire dispose aujourd'hui d'un capital de 3 000 000F. Aide cette organisation à savoir à quel taux elle peut lacer ce capital aujourd'hui pour que la valeur acquise après cinq ans soit égale à 3 600 000F

4.2) activité d'apprentissage :

Au bout de la première semaine de fonctionnement, la production de boites d'un médicament générique est de 200 000 unités. Par suite, on envisage d'augmenter cette production de 3% par semaine. Désignons par $U_1 = 200\,000$ la production en unité a la fin de la première semaine, U_2 la production en unités à la fin de la deuxième semaine et par U_n la production en unités à la fin de la n-ieme semaine

1) Calculer $U_2;\ U_3$
2) Quelle est la nature de la suite de terme général U_n ? préciser la raison de cette suite

3) Exprimer U_n en fonction de n puis en déduire la production au bout de la 12^{eme} semaine (arrondir le résultat a l'unité)

4) L'équation $300\,000 = 200\,000 \times (1{,}03)^{n-1}$ permet de déterminer le nombre n de semaine nécessaires pour que la fabrication atteigne 300 000 boites. Résoudre cette équation en faisant figurer les différentes étapes du calcule et arrondir le résultat à l'unité

Solution de l'activité d'apprentissage :

1) Calculons U_2; U_3

On a : $U_2 = U_1 + \frac{3}{100}U_1 = 1{,}03U_1 = 1{,}03 \times 20\,000 = 206\,000$ et par la meme méthode, on a : $U_3 = U_2 + \frac{3}{100}U_2 = 1{,}03U_2 = 1{,}03 \times 206000 = 212\,180$ donc on a : $\boldsymbol{U_2 = 206\,000\ boites}$ et $\boldsymbol{U_3 = 212\,180\ boites}$

2) La suite de terme général U_n est une suite géométrique de raison $q = 1{,}03$

3) On a : $U_3 = 1{,}03U_2 = (1{,}03)^2U_1$ par conjecture on a $\boldsymbol{U_n = (1,03)^{n-1}U_1 = 200000 \times (1,03)^{n-1}}$.la production au bout de la 12^{eme} semaine est : $\boldsymbol{U_{12} = 200000 \times (1,03)^{11} \approx 276\,847\ boites}$

4) Déterminons la valeur de n dans l'équation : $300\,000 = 200\,000 \times (1{,}03)^{n-1}$.

On a : $(1{,}03)^{n-1} = \frac{3}{2} \Rightarrow (n-1)\ln(1{,}03) = \ln\left(\frac{3}{2}\right) \Rightarrow \boldsymbol{n = \frac{\ln(\frac{3}{2})}{\ln(1,03)} + 1 \approx 15}$ donc $\boldsymbol{n = 15}$

4.3) RESUME

a) Définition

Soit α un réel. on appelle ***fonction puissance α***, la fonction notée f_α définie par :

$$\begin{cases} \quad]\mathbf{0}; +\infty[\to \boldsymbol{IR} \\ \boldsymbol{x \mapsto f_\alpha = x^\alpha = e^{\alpha.lnx}} \end{cases}$$

$\boldsymbol{consequence}$: $pout\ tout\ reel\ x\ appartenant$ à $]0; +\infty[$, $\boldsymbol{x^\alpha = e^{\alpha lnx}} > 0$

b) Propretés (x > 0)

P1) $x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}$

P2) $x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$

P3) $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha \times x^\beta$

Exemples :

1) Simplifier le nombre : $\frac{\sqrt{9}\times\sqrt{27}\times(\sqrt[3]{9})^2}{\sqrt[3]{\sqrt{3}}} = \frac{3(3^3)^{\frac{1}{2}}((3^2)^{\frac{1}{3}})^2}{((3)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}} = \frac{3^{1+\frac{3}{2}}\times 3^{\frac{3}{4}}}{3^{\frac{1}{6}}} = 3^{\frac{5}{2}+\frac{4}{3}-\frac{1}{6}} = 3^{\frac{11}{3}}$

2) Résoudre l'inéquation : $(\frac{1}{2})^x \geq \frac{3}{2}$

L'équation $(\frac{1}{2})^x \geq \frac{3}{2}$ est équivalent à $xln\left(\frac{1}{2}\right) \geq \ln\left(\frac{3}{2}\right) \Rightarrow x \leq \frac{\ln(\frac{3}{2})}{\ln(\frac{1}{2})} \Rightarrow x \leq \frac{ln3-ln2}{-ln2} \Rightarrow x \leq 1 - \frac{ln3}{in2}$,

donc l'ensemble solution est : $S = \left]-\infty; 1 - \frac{ln3}{in2}\right]$

c) Etude de la fonction puissance ($x \to x^{\alpha}$)

i) Domain de définition

$D_f =]0; +\infty[$

ii) Limites au bornes du D_f

- Si $\alpha = 0$ alors $f_\alpha = 1$
- **Si** $\boldsymbol{\alpha < 0}$ **,** $\boldsymbol{alors\ \lim_{x\to 0^+} f_\alpha(x) = +\infty\ et\ \lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = 0}$
- **Si** $\boldsymbol{\alpha > 0, alors\ \lim_{x\to 0^+} f_\alpha(x) = 0\ et\ \lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = +\infty}$

iii) Dérivée et sens de variation

Soit pout tout x appartenant à $]0; +\infty[$, alors $\boldsymbol{f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha lnx}}$. La dérivée est donnée par :

$$\boldsymbol{f'_\alpha(x) = \frac{\alpha}{x} \times e^{\alpha lnx} = \frac{\alpha}{x} \times x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}}$$

- Si $\alpha < 0, alors\ f'_\alpha(x) < 0, alors\ f_\alpha(x) est\ decroisante$
- Si $\alpha > 0\ , alors\ f'_\alpha(x) > 0, alors\ f_\alpha(x) est\ croissante$
-

iv) Tableau de variation

$\boldsymbol{*si\ \alpha} < 0$

x	0	$+\infty$
$f'_\alpha(x)$	$-$	
$f_\alpha(x)$	$+\infty$ $\searrow$	0

$*\ \boldsymbol{si\ \alpha} > 0$

x	0	$+\infty$
$f'_\alpha(x)$	$+$	
$f_\alpha(x)$	0 $\nearrow$	$+\infty$

d) Croissance comparées

À l'infini, il arrive que l'on ait une fonction $\boldsymbol{x \longmapsto e^{u(x)}}$ à comparer avec une fonction polynome. Pour déterminer la limite quand les théorèmes sur les opérations ne permettent pas de conclure, on peut transformer l'écriture pour faire apparaitre : $\boldsymbol{\frac{e^{u(x)}}{u(x)}}$ ***ou*** $\boldsymbol{\frac{e^{u(x)}}{(u(x))^2}}$ ***ou*** $\boldsymbol{(u(x))^n \times e^{u(x)}}$ ***etc*** ...

Considérons les fonctions suivantes : $x \to \boldsymbol{lnx}$; $\boldsymbol{x \to x^{\alpha}}$; $\boldsymbol{x \to e^{x}}$ avec α un réel positif. On a :

1) $\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x^{\alpha}} = 0}$ **;**
2) $\boldsymbol{\lim_{x\to 0^{>}} x^{\alpha} lnx = 0}$ **;**
3) $\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x^{\alpha}} = +\infty}$ **;**
4) $\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} e^{-x} = 0}$ **;**

Note : Ces limites traduisent le fait que la fonction ***exponentielle*** croit plus vite (**ou l'emporte sur tout fonctions polynômes**) que la fonction $\boldsymbol{x^{\alpha}}$ et que la fonction polynôme croit plus vite (**ou l'emporte sur tout logarithme**) que la fonction $\boldsymbol{lnx}$**.** On dit que l'exponentielle est prépondérante

e) Exemples de calculs de limite

Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $x \to \frac{e^{x}}{\ln(x^2+1)}$

Solution:

On a : $\forall x \in IR,\ \frac{e^{x}}{\ln(x^2+1)} = \frac{e^{x}}{x^2} \times \frac{x^2}{x^2+1} \times \frac{x^2+1}{\ln(x^2+1)}$, or : $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x^2} = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{\ln(x^2+1)} = +\infty$. Donc $\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{\ln(x^2+1)} = +\infty}$

Exemple 2:

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to+\infty} (\frac{4x^2}{e^{x}+2})$
b) $\lim_{x\to+\infty} (x^2-4)e^{-0,4x+1}$

Exercices applications

Exercise 1

1) Soit x un réel strictement positif. Mettre sous la forme x^{α} les nombres réels suivants :

✓ $\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$; $\frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3}}$; $\sqrt[5]{x^3}$; $\sqrt[3]{x} \times \sqrt[4]{x}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les equation ;

- ✓ $x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{2}{3}} = 2$
- ✓ $x^{\pi} - 42x^{-\pi} = 1$

Exercice 2 :

On considère la f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x^{0,6}$. Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité 1cm.

1) Ecrire f(x) a laide de la fonction exponentielle puis en déduire les limites de f en 0 et en $+\infty$ ainsi que son tableau de variation
2) Ecrire une équation de la tangente (T) a (C_f) au point d'abscisse 1
3) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repere
4) Tracer la courbe (C_f) ainsi que sa tangente

Exercice 3 :

Partie A.

Au 1^{er} janvier 2002, le pays A compte 20 millions d'habitants et sa populations augmente en moyenne annuellement de $\mathbf{1,6\%}$. On note P_n le nombre d'habitants (en millions) au 1er janvier de l'année $\mathbf{2002+n}$

1) Montrer que la suite (P_n) est une suite geometrique. Préciser sa raison et son terme initial P_o puis en deduire l'expression de P_n en fonction de n
2) On décide de modéliser l'évolution de la population du pays A par la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :$\boldsymbol{f(t) = 20 \times (1,016)^t}$, ou t est le temps ecoulé depuis le 1er janvier 2002 et $\boldsymbol{f(t)}$ le nombre d'habitants au temps $2002 + \ t$ exprimé en millions.
   a) Etudier le sens de variation de f sur $[0;+\infty[$
   b) Calculer la limite de f en $+\infty$ et dresser son tableau de variation
   c) Tracer la courbe (C_f) dans un repère orthogonal d'unité $\boldsymbol{1cm\ pour\ 5ans}$ sur l'axe des abscisses et $\boldsymbol{1cm\ pour\ 5\ millions}$ sur l'axe des ordonnées

Partie B

Au 1er janvier 2002, le pays B compte 25 millions d'habitants et l'évolution de sa population est modélisée par la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par : $\boldsymbol{g(t) = 25(1+t)^{0,11}}$

1) Calculer la limite de g en $+\infty$

2) Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation

3) Tracer (C_g) la représentation graphique de g dans le repère de la **partie A**

4) A l'aide du graphique, lire en quelle année la population du pays A dépassera celle du pays B

Partie C

Le but de cette partie est de retrouver par le calcul et avec plus de précision le résultat de la question **4) de la partie B**.

1) On considère la fonction h définie sur $[0;+\infty[$ par : $\boldsymbol{h(t) = tln(1,016) - 0,11\ln(1+t) + \ln(0,8)}$.

   a) Etudier le sens de variation de h

   b) Montrer que l'équation $\boldsymbol{h(t) = 0}$ a une unique α sur $[0;+\infty[$. Donner un encadrement de α à $10^{-1}\ pres$

   c) En déduire le signe de h(t) sur $[0;+\infty[$

2) Montrer que sur $[0;+\infty[$: $\boldsymbol{f(t) \geq g(t) \Leftrightarrow h(t) \geq 0}$ et en déduire durant quelle année la population de pays A dépassera celle du pays B

MODULE 25	RELATIONS ET OPERATIONS FONDAMENTALES DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES REELS

CHAPITRE 3 :

SUITES NUMERIQUES

MOTIVATION

Dans notre vie quotidienne nous sommes souvent amenés à faire des choix sur des options bancaires, de payement de loyer ; à faire des prévisions sur l'évolution budgétaire, taux de chômage, PIB, etc. L'utilisation des suites numériques est un moyen parfois efficace pour la résolution de ces problèmes.

LECON 1 : Raisonnement par récurrence sur ℕ

Durée : 100 minutes

OBJECTIF PEDAGOGIQUE : Utiliser le raisonnement par récurrence pour démontrer certaines propriétés sur ℕ.

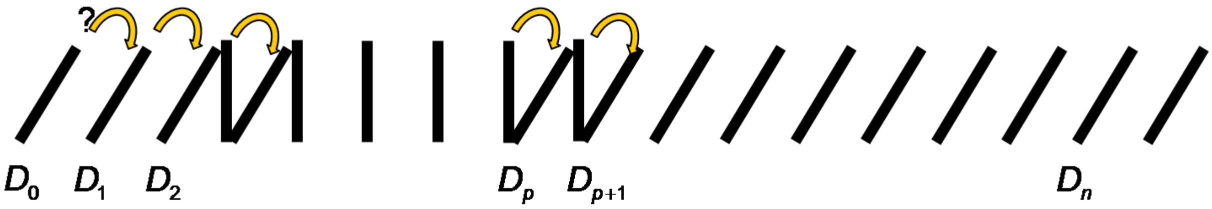
PREREQUIS

- Soit la suite (U_n) définie par $\begin{cases} U_5 = \frac{1}{3} \\ U_{n+1} = -3U_n + 12 \end{cases}$. Calculer les 5 premiers termes de cette suite.

-Expliciter l'ensemble ℕ ; quel est son plus petit élément ? ℕ a-t-il un plus grand élément ? Si oui lequel ?

SITUATION PROBLEME

Lors d'un jeu de dominos, le père de Yvan dispose les dominos de la manière suivante.



Il demande donc à son fils ceci : « Si je fais tomber le premier domino D_0 , comment être certain que tous les dominos tomberont ? » Toi élève en terminale D, comment peux-tu aider Yvan à répondre à la question de son père ?

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

Intéressons-nous au signe de la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 5U_n + 4 \end{cases}$

Le but pour notre suite (U_n) est de montrer qu'elle est à termes positifs.

1) Vérifier que $U_0 > 0$.
2) Montrer que si $U_p > 0$ alors $U_{p+1} > 0$.

SOLUTION

1) $U_0 = 2$ par définition donc $U_0 > 0$.µ
2) Supposons que $U_p > 0$; alors $5U_p + 4 > 0$. D'où $U_{p+1} > 0$.

Conclusion : $U_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

On vient de montrer par le principe de récurrence que pour tout n, $U_n > 0$. Revenons au problème des dominos ; « le domino D_n tombe » correspond pour la suite (U_n) à la propriété : $U_n > 0$. Montrer que le premier domino D_0 tombe correspond pour la suite (U_n) à montrer que : $U_0 > 0$. Montrer que quel que soit le domino D_p, s'il tombe alors le domino suivant D_{p+1} tombe aussi correspond pour la suite (U_n) à montrer que : si $U_p > 0$ alors $U_{p+1} > 0$.

En effet, si je veux être certain que tous les dominos tomberont, je dois « en théorie » vérifier deux choses :

1) Que le premier domino D_0 tombe.

Rien ne garantit qu'alors le domino suivant D_1 tombe aussi. Cette première condition s'appelle : l'**initialisation.** Il faut donc que je vérifie une deuxième chose.

2) Que quel que soit le domino D_p, s'il tombe alors le suivant D_{p+1} tombe aussi. Cette deuxième condition s'appelle l'**hérédité.**

Ainsi comme d'après 1) D_0 tombe alors d'après 2) D_1 tombe ; comme D_1 tombe d'après 2) D_2 tombe et ainsi de suite. Par cet enchainement sans fin on peut donc affirmer que si les conditions 1) et 2) sont vérifiées alors quel que soit n, D_n tombe.

RESUME : Pour démontrer qu'une proposition P(n) qui concerne un entier naturel n, est vraie pour tout n supérieur ou égal à n_0, on procède en deux étapes :

- On démontre que $P(n_0)$ est vraie : **initialisation**
- On démontre que pour tout k supérieur ou égal à n_0 , si P(k) est vraie alors P(k+1) est vraie : **hérédité.**

Exemple 1 : Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

Solution : Etape 1 (initialisation) : la propriété est vraie pour n=1 car $1^2=\frac{1(1+1)}{2}$.

Etape 2 (hérédité) : On considère que la propriété est vraie pour une valeur k, c'est-à-dire que $1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$ et démontrons qu'elle est vraie pour la valeur k+1.

$$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Ce qui correspond bien à l'égalité de départ en remplaçant n par k+1.

Conclusion : pour tout entier naturel non nul n, $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

EXERCICE D'APPLICATION

montrer en utilisant le principe de récurrence que :

1) $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$

LEÇON 2 : suites monotones ; suites bornées ; suites croissantes majorées ou suites décroissantes minorées. Durée : 100 minutes

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES : -Etudie la monotonie d'une suite numérique.

-Justifier qu'une suite numérique est majorée ou minorée.

-Montrer sans calculer sa limite, qu'une suite est convergente.

PREREQUIS

-Définir correctement les termes suivants : **suite numérique, fonction minorée, fonction majorée, fonction bornée, fonction croissante, fonction décroissante, fonction monotone**

-Reconnaitre une suite définie de manière explicite ou par son premier terme et sa formule de récurrence.

-Etudier les variations de la fonction f $définie\ par\ f(x) = \frac{20x+14}{x+1}$ sur $[0; +\infty[$ et tracer sa courbe représentative C_f dans un repère orthonormé (O, I, J).

SITUATION PROBLEME 1

Lors d'un débat de culture mathématique, Sebastien demande à Marie de choisir un nombre compris entre 1000 et 2000 et Marie choisit le nombre 1200. Sebastien lui dit :

-Tu prends sa moitié puis tu lui ajoutes 5160.

-Tu reprends la moitié du résultat obtenu puis tu ajouts de nouveau 5160.

-Tu peux continuer ainsi autant de fois que tu veux, je suis sûr que tu ne dépasseras jamais 11000.

Marie commence les calculs. Après quelques étapes elle dit à Sebastien : « ce n'est pas possible, à voir l'allure de mes calculs je suis presque sûr que je dépasserai 11000. Tu as tort. »

Tranche le débat entre Sebastien et Marie.

SITUATION PROBLEME 2

Une équipe de biologistes a effectué plusieurs expériences avec une certaine espèce d'insectes. L'analyse des données a montré que n semaines après le début des expériences, le nombre d'insectes (en centaines) est $V_n = 20 - \frac{6}{n+1}$. L'on souhaite décrire l'évolution de la population d'insectes au cours d'expériences successives.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGES

Activité 1

: Soit la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 1200 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 5160 \end{cases}$

1) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} - 10320 = \frac{1}{2}(U_n - 10320)$.
2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n - 10320 = \left(\frac{1}{2}\right)^n (U_0 - 10320)$.
3) Déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < U_n < 11000$.

SOLUTION

1) Soit n $\in \mathbb{N}$; $U_{n+1} - 10320 = \frac{1}{2}U_n + 5160 - 10320 = \frac{1}{2}U_n - 5160 = \frac{1}{2}(U_n - 10320)$.

   Donc $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} - 10320 = \frac{1}{2}(U_n - 10320)$.
2) D'après 1) on a : $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} - 10320 = \frac{1}{2}(U_n - 10320)$.

   Donc $U_n - 10320 = \frac{1}{2}(U_{n-1} - 10320)$.

   $U_{n-1} - 10320 = \frac{1}{2}(U_{n-2} - 10320)$.

   $U_{n-2} - 10320 = \frac{1}{2}(U_{n-3} - 10320)$.

   ……………………………………………………………

   ……………………………………………………………

   ……………………………………………………………

   $U_2 - 10320 = \frac{1}{2}(U_1 - 10320)$.

   $U_1 - 10320 = \frac{1}{2}(U_0 - 10320)$.

   En multipliant membres à membres chaque terme de ces n égalités et en simplifiant, on a :

   $\forall n \in \mathbb{N}, U_n - 10320 = \left(\frac{1}{2}\right)^n (U_0 - 10320)$.
3) D'après 2), on : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n - 10320 = \left(\frac{1}{2}\right)^n (U_0 - 10320) = \left(\frac{1}{2}\right)^n (-5160) < 0$.

   Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, U_n - 10320 < 0$. D'où $\forall n \in \mathbb{N}, U_n < 10320 < 11000$. Et par conséquent $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < U_n < 11000$.

   A partir de ce qui précède on peut trancher le débat entre Sebastien et Marie. Si U_0 est le nombre choisit par Marie et U_n le nombre obtenu après n étapes, alors on a : $\begin{cases} U_0 = 1200 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 5160 \end{cases}$ et d'après la question 3 de l'activité 1, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n < 11000$. Donc le nombre obtenu par Marie après n étapes ne dépassera jamais 11000. Sebastien avait bel et bien raison.

ACTIVITE 2

Soit la suite (V_n) définie par : $V_n = 20 - \frac{6}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1) Calculer $V_0, V_1, V_2, V_{49}, V_{99}$.

2) Etudier les variations de la fonction f $définie\ par\ f(x) = \frac{20x+14}{x+1}$ sur $[0; +\infty[$ et tracer sa courbe représentative C_f dans un repère orthonormé (O,I,J).

Peux-tu répondre à la préoccupation de la situation problème 2 ?

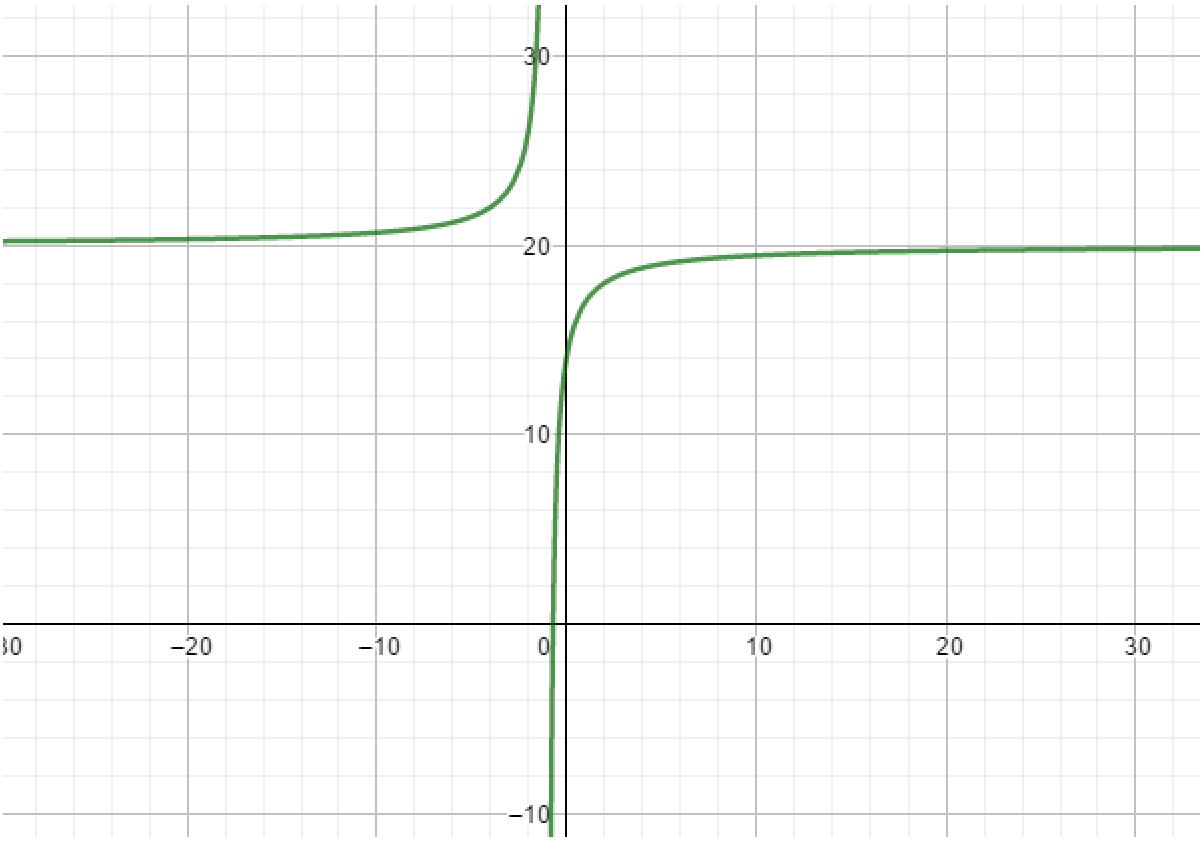
SOLUTION

1) $V_0 = 20 - \frac{6}{0+1} = 14$; $V_1 = 20 - \frac{6}{1+1} = 17$; $V_2 = 20 - \frac{6}{2+1} = 18$;
$V_{49} = 20 - \frac{6}{49+1} = 19{,}8$; $V_{99} = 20 - \frac{6}{99+1} = 19{,}94$
2) Etudions les variations de la fonction $f : x \longmapsto \frac{20x+14}{x+1}$ sur $[0; +\infty[$.
f est continue et dérivable sur $[0; +\infty[$ et pour tout $x \in [0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{6}{(x+1)^2} > 0$.
Donc f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
$f(0) = \frac{0+14}{0+1} = 14$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{20x+14}{x+1} = 20$.

Tableau de variations :

X	0	$+\infty$
f'(x)	+	
f(x)	14 ↗	20

Tracé de la courbe :



D'après le tableau de variations, on voit bien que la courbe est strictement croissante sur $[0;\ +\infty[$. Le nombre initial d'insectes est de 1400. Puis ce nombre augmente au fil des expériences selon que l'indique la courbe de f jusqu'à arriver à un nombre limité d'insectes qui est de 2000.

RESUME :

1) Suites minorées, suites majorées, suites bornées

Définitions : Soit E une partie non vide de $\mathbb{N}$, soit $(U_n)_{n\in E}$ une suite numérique.

- (U_n) est minorée s'il existe un nombre réel m tel que, pour tout n élément de E, on a : $U_n \geq m$.
- (U_n) est majorée s'il existe un nombre réel M tel que, pour tout n élément de E, on a : $U_n \leq M$.
- (U_n) est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

N.B : On dit que m est un minorant de (U_n) et M un majorant de (U_n).

- Une suite est positive (respectivement négative) si tous ses termes sont positifs (respectivement négatifs).

Exemples :

1) Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général : $U_n = \frac{\sin n}{n^2}$. On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, |U_n| \leq \frac{1}{n^2} \leq 1$. On en déduit que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.
2) Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général : $V_n = \ln(2n+1) - \ln(n+1)$. La fonction f définie par $f(x) = \ln(2x+1) - ln(x+1)$ est dérivable sur $[0; +\infty[$ et a pour dérivée $f'(x) = \frac{1}{(2x+1)(x+1)}$ qui est strictement positif ; donc la fonction f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$. De plus, f(0)=0 et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = ln2$; donc $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq V_n \leq ln2$; on en déduit que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
3) On considère la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} W_0 = -1 \\ W_{n+1} = \sqrt{2W_n + 3} \end{cases}$
   Montrer par récurrence que $-1 \leq W_n \leq 3$.

2) Suites monotones

Définition : Soit $(U_n)_{n\in E}$ une suite numérique.

- La suite (U_n) est **croissante** si pour tout n élément de E, $U_n \leq U_{n+1}$.
- La suite (U_n) est **décroissante** si pour tout n élément de E, $U_{n+1} \leq U_n$.
- La suite (U_n) est **constante** si pour tout n élément de E, $U_n = U_{n+1}$.
- Si pour tout n élément de E, $U_n < U_{n+1}$ (respectivement $U_{n+1} \leq U_n$), alors la suite (U_n) est strictement croissante (strictement décroissante).
- Une suite est **monotone** lorsqu'elle est soit croissante, soit décroissante.
- Une suite est **stationnaire** si elle est constante à partir d'un certain rang.

Exemples :

1) Soit (U_n) la suite de terme général : $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n+1}$. Or $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n+1} > 0$ et donc $U_{n+1} > U_n$. On en déduit que la suite (U_n) est strictement croissante.

2) Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général : $V_n = \frac{1}{2} \times \frac{2}{4} \times \ldots \times \frac{2n+1}{2n}$.

La suite (V_n) est strictement positive et on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, V_{n+1} < V_n$. On en déduit que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.

3) Soit la suite (W_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $W_n = \frac{3n-2}{n+1}$.

$W_n = f(n)$ avec f qui est la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{3x-2}{x+1}$. f est continue et dérivable sur $[0; +\infty[$ et on a : $f'(x) = \frac{-5}{(x+1)^2} < 0$. Donc f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$. D'où la suite (W_n) est décroissante.

3) Notion de convergence

Définition :

- Une suite est convergente si elle a une limite finie.
- Une suite est divergente si elle a une limite infinie ou si elle n'admet pas de limite (on dit encore qu'elle n'est pas convergente).

Propriétés :

- Toute suite croissante et majorée converge.
- Toute suite **décroissante et minorée** converge.
- Toute suite **monotone et bornée** converge.
- Soit (U_n) une suite définie par une formule explicite (c'est-à-dire $\boldsymbol{U_n = f(n)}$ où f est une fonction numérique). Si f a une limite en $+\infty$, alors U_n a une limite et on a **:** $\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{x\to+\infty} f(x)}$.
- Soit (U_n), (V_n), (W_n) pour tout $n \in \mathbb{N}$ trois suites numériques.
  - ✓ Si $U_n < V_n$ alors $\lim_{n\to+\infty} U_n < \lim_{n\to+\infty} V_n$
  - ✓ Si $U_n \leq V_n$ et $\lim_{n\to+\infty} V_n = -\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = -\infty$.
  - ✓ Si $U_n \leq V_n$ et $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} V_n = +\infty$.
  - ✓ Si $V_n \leq U_n \leq W_n$ et $\lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty} W_n = l \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = l$.

Exemple :

Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 = \frac{-3}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \sqrt{U_n + 2}$.
Démontrons par récurrence la suite (U_n) est croissante et majorée par 2 et conclure que la suite (U_n) converge.

LEÇON 3 : Etude de la convergence de certaines suites définies par $U_{n+1} = f(U_n)$
50 minutes

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES :
-Etudier la convergence de certaines suites définies par $U_{n+1} = f(U_n)$.
-En utilisant les inégalités des accroissements finis, donner une valeur approchée de sa limite.

PREREQUIS :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{6+x} = x$, puis énoncer clairement les inégalités des accroissements finis.

SITUATION PROBLEME :

Considérons la suite (U_n) définie par : $U_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = \sqrt{6+U_n}$. (U_n) converge-t-elle ? Si oui précisez une valeur approchée de sa limite.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

Soit la suite (U_n) définie par : $U_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = \sqrt{6+U_n}$.

Soit la fonction f définie en x par $f(x) = \sqrt{6+x}$.

a. En remarquant que $U_{n+1} = f(U_n)$, représentez les cinq premiers termes de la suite (U_n) sur l'axe des abscisses d'un repère orthonormé du plan.
b. Peut-on conjecturer graphiquement sur la convergence de la suite (U_n) ? Donner une valeur approchée de cette limite si elle existe, par rapport à l'abscisse d'un des points communs à la courbe de f et la droite d'équation $y = x$.
c. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = x$.

SOLUTION :

a. Faire la représentation
b. La construction des cinq premiers termes de la suite (U_n) permet de conjecturer que cette suite est croissante et convergente. Une valeur approchée de la limite de cette suite est 2,9 .
c. $f(x) = x \Rightarrow \sqrt{6+x} = x \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = -2 \; ou \; x = 3$. Comme $x \geq 0$ alors $x = 3$. Ce 3 qu'on vient de trouver est la limite de la suite (U_n).

RESUME :
Soit (U_n) la suite définie par la donnée U_0 et de la relation de récurrence $U_{n+1} = f(U_n)$ pour tout entier naturel n.

Si la suite (U_n) est convergente et converge vers l, et si f est continue en l, alors l est une solution de l'équation $f(x) = x$.

Exemple 1 : Etudions la limite de la suite $(\boldsymbol{U_n})$ définie par : $U_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 2$.
Soit la fonction $f: x \longmapsto \frac{1}{2}x + 2$; la construction sur (OI) des premiers termes de la suite (U_n) permet de conjecturer que cette suite est croissante et converge vers 4.
L'équation f(x)=x a une solution :4 donc si la suite (U_n) converge, elle converge vers 4.
Démontrons que la suite (U_n) est convergente.
On a : $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} - 4 = \frac{1}{2}(U_n - 4)$; on en déduit que : $U_n - 4 = \frac{1}{2^n}(U_n - 4)$. Or $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ donc (U_n) converge vers 4.

Exemple 2 : Etudier la convergence de la suite (V_n) définie par : $V_0 = \sqrt{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = 2 + \frac{1}{V_n}$
Soit la fonction g définie par $g(x) = 2 + \frac{1}{x}$. C_g sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O,I,J) et (Δ) la droite d'équation y=x. La construction sur (O,I) des premiers termes de la suite (V_n) permet de conjecturer que cette suite est convergente (tracer cette courbe).

- L'équation g(x)=x a deux solutions : $1 - \sqrt{2}$ et $1 + \sqrt{2}$. Or la suite (V_n) est positive donc si la suite (V_n) est convergente, alors elle converge vers $1 + \sqrt{2}$.
- Démontrons que la suite (V_n) est convergente.

On a : $V_0 \geq \sqrt{2}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $V_k \geq \sqrt{2} \Rightarrow V_{k+1} \geq \sqrt{2}$ donc par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n \geq \sqrt{2}$.

- Appliquons l'inégalité des accroissements finis à la fonction g définie sur l'intervalle $[\sqrt{2};\ +\infty[$.

On a : $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$; donc $\forall x \in [\sqrt{2};\ +\infty[$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
On obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, |g(V_n) - g(1 + \sqrt{2})| \leq \frac{1}{2}|V_n - (1 + \sqrt{2})|$
C'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}, |V_{n+1} - (1 + \sqrt{2})| \leq \frac{1}{2}|V_n - (1 + \sqrt{2})|$
On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}, |V_n - (1 + \sqrt{2})| \leq (\frac{1}{2})^n|V_0 - (1 + \sqrt{2})|$
C'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}, |V_n - (1 + \sqrt{2})| \leq (\frac{1}{2})^n$
Par conséquent la suite (V_n) converge vers $1 + \sqrt{2}$.

❖ **Tableau récapitulatif sur les suites arithmétiques et les suites géométriques** :

	Suites arithmétiques	**Suites géométriques**
Premier terme	$\boldsymbol{U_0}$	$\boldsymbol{U_0}$
Raison	**r** $(\boldsymbol{r} \in \mathbb{R})$	$\boldsymbol{q}$ $(\boldsymbol{q} \in \mathbb{R})$
Formule de récurrence	$\boldsymbol{U_{n+1} = U_n + r}$	$\boldsymbol{U_{n+1} = qU_n}$
Formule explicite	$\boldsymbol{U_n = U_0 + nr}$ $\boldsymbol{U_n = U_p + (n-p)r}$	$\boldsymbol{U_n = q^n U_0}$ $\boldsymbol{U_n = q^{n-p} U_p}$
Somme des n premiers termes ($\boldsymbol{U_0}$+$\boldsymbol{U_1}$+…+$\boldsymbol{U_{n-1}}$)	$\boldsymbol{\frac{n}{2}(U_0 + U_{n-1})}$	$\boldsymbol{U_0 \times \frac{1-q^n}{1-q}}$ **avec** $\boldsymbol{q \neq 1}$

EXERCICES D'APPLICATION :

Exercice 1 : Soit la suite (U_n) définie par $\begin{cases} U_0 > 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n} \end{cases}$

1) Montrer que si (U_n) converge, alors sa limite ne peut être que 0 ou 1.
2) On suppose que $U_0 < 1$. Montrer que (U_n) est croissante et majorée par 1.
3) On suppose que $U_0 > 1$, montrer que (U_n) est décroissante et minorée par 1.
4) Déduire que (U_n) converge vers 1.

Exercice 2 : Soit la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{2+{U_n}^2} \end{cases}$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_n > 0$

2.a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, U_{n+1} \leq \frac{1}{2} U_n$

b) Montrer que $n \in \mathbb{N}, U_n \leq (\frac{1}{2})^n$.

3) Montrer que (U_n) converge vers 0.
4) Soit $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$

a) Montrer que (S_n) est croissante.

b) Montrer que $S_n \leq 2(1 - (\frac{1}{2})^{n+1})$

c) En déduire que (S_n) est converge vers un réel $l \in [1; 2]$

Exercice 3 : On considère l'équation : $\ln(x + 3) = x$.

1) Démontrer que cette équation admet dans $\mathbb{R}_+$ une solution unique α comprise entre 1 et 2.
2) On désigne par f la fonction $x \longmapsto \ln(x + 3)$ et par K l'intervalle $[1; 2]$.
   a) Démontrer que : $f(K) \subset K$.
   b) Démontrer que :$\forall x \in K, |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.
3) Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \ln(x + 3)$.
   a) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{4^n} |U_0 - \alpha|$.
   En déduire que : $\lim_{n\to+\infty} U_n = \alpha$.
   b) Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de α.

MODULE 25 :	RELATIONS ET OPERATIONS FONDAMENTALES DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES REELS

CHAPITRE IX : CALCUL DES INTEGRALES

INTERET:

Familiariser les élèves avec quelques problèmes relevant du calcul intégral et qui, en retour donne du sens à la notion d'intégrale :

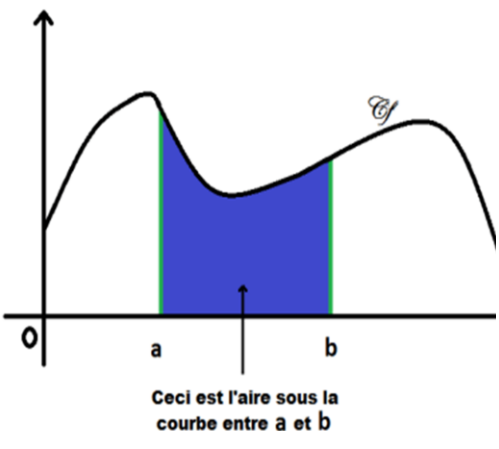
- calcul de grandeurs géométriques (aires et volumes)
- de grandeurs physiques (distance parcourue connaissant la vitesse ;
- valeur moyenne ;
- Fournir aux élèves le symbolisme du calcul intégral et exploiter sur les exemples simples, les propriétés de l'intégrale pour l'étude des fonctions ;
- Acquérir les techniques du calcul intégral.

MOTIVATION :

Les intégrales nous permettent de calculer l'aire délimitée par une courbe.

Sur la figure ci-contre, on veut essayer de calculer l'aire de la zone colorée. Une idée naturelle consiste à approcher cette aire par la somme des aires de certains rectangles bien choisis, L'aire ainsi calculée est appelée intégrale, et on verra comment calculer ce genre de quantités.

Dans ce cours, on ne s'intéressera qu'à ce qu'on appelle des intégrales "définies", c'est-à-dire qu'on ne considérera que des fonctions définies sur des intervalles fermés.



:

- Calculer l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$.
- Calculer l'intégrale d'une fonction continue en utilisant une intégrale par partie.
- Calculer l'intégrale d'une fonction continue en utilisant un changement de variable adéquat.
- Calculer l'intégrale d'une fonction continue contenant des polynômes trigonométriques

- Calculer l'intégrale d'une fonction continue contenant des polynômes rationnelles

LEÇON 1: INTEGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE SUR UN INTERVALLE.

DUREE : 100 minutes

COMPETENCE A ACQUERIR PAR LES ELEVES :

A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de :

- Calculer l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle fermé
- Acquérir les techniques du calcul intégral.

PRE-REQUIS :

- Primitives d'une fonction
- Continuité d'une fonction sur un intervalle fermé

SITUATION PROBLEME :

Un menuisier fabrique y objets en fonction du temps t, il a été établie que la relation liant y et t est $y = \frac{t}{2} + 3$, il a travaillé deux heures de temps et doit encore travailler pendant six heures de temps. Calculer le nombre objets qu'il doit fabriquer.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

1) Montrer que les fonctions $F(x) = \frac{x^2}{4} + 3x + 2$ et $G(x) = \frac{x^2}{4} + 3x$ sont des primitives de la fonction $f(x) = \frac{x}{2} + 3$

2) Calculer $F(6) - F(-2)$ et $G(6) - G(-2)$.

3) Tracer dans un repère $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, unité 1cm sur les axes, les droites d'équations $(D): y = \frac{x}{2} + 3$, $(D'): x = -2$ et $(D''): y = 6$. Calculer l'aire du trapèze comprise entre les droites d'équations (D), (D'), (D'') et l'axe des abscisses.

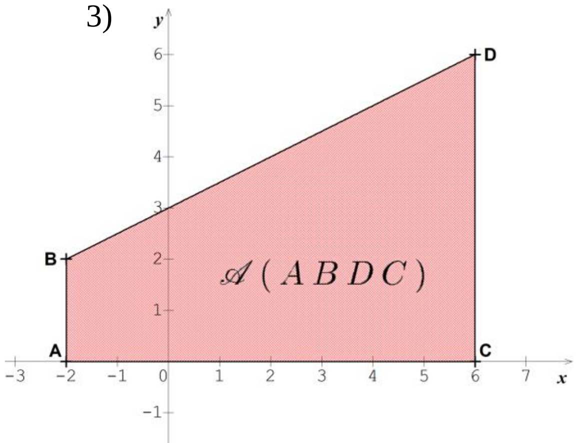
4) Que remarque-t-on ?

5) En déduire la solution de la situation problème

SOLUTION :

1) $F'(x) = G'(x) = f(x) = \frac{x}{2} + 3$ d'où $F(x)$ et $G(x)$ sont des primitives de $f(x)$

2) $F(6) - F(-2) = G(6) - G(-2) = 32$

3) 

On a : $AB = 2cm$; $DC = 6cm$ et $AC = 8cm$

$$A(ABDC) = \frac{(DC + AB) \times AC}{2} cm^3$$
$$= \frac{(6 + 2) \times 8}{2} cm^3$$
$$= 32cm^3$$

4) On remarque que l'aire du trapèze est égal à la quantité $F(6) - F(-2) = G(6) - G(-2) = 32$

SOLUTION DE LA SITUATION PROBLEME

Le nombre d'objets fabriqués est d'égale à $\int_{-2}^{6}(\frac{t}{2} + 3)dt = 32$ objets (aire du trapèze calculer à l'activité d'apprentissage)

RESUME :

Soit une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et F une primitive de f.

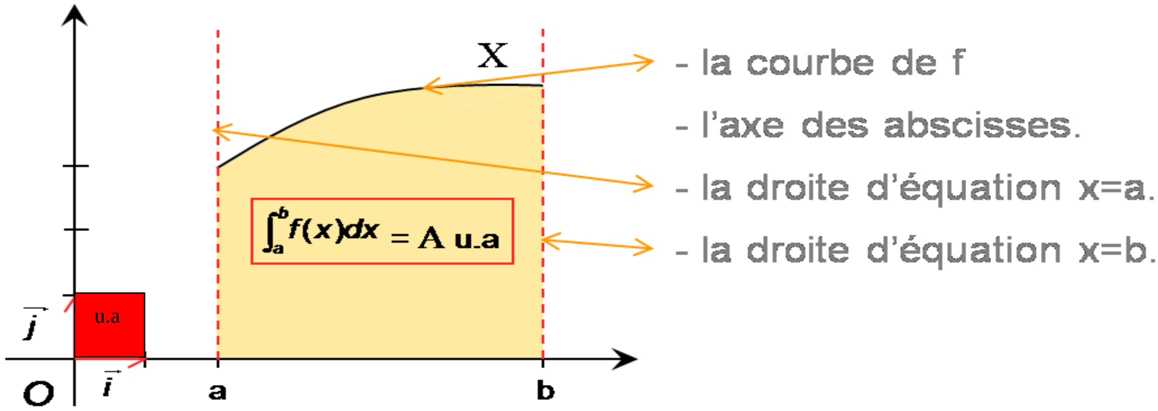
- Le nombre $F(b) - F(a)$ est indépendant de la primitive choisie. On dit que c'est l'intégrale de la fonction f, définie entre les valeurs a et b et on note :

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

- Une intégrale est indépendante de la variable intégration, ainsi :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(v)dv = \cdots$$

- **Interprétation graphique de l'intégrale.**
  Si f est continue et positive sur $[a, b]$ et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (0,I,J), alors $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire, en unité d'aire du domaine D limité par les droites $x = a, x = b$, la courbe (C_f) et l'axe des abscisses.
- L'unité d'aire (u.a.) est l'aire du rectangle de dimension respectives OI et OJ



- On appelle valeur moyenne de f sur [a, b] le nombre réel μ tel que : $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$

Propriétés des intégrales. Soit α, β deux réel, f, g deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, a et $b(a \leq b)$ deux éléments de I, alors :

- $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$
- $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^\alpha f(x)dx + \int_\alpha^b f(x)dx$
- Pour tout x de $[a, b], f(x) \geq 0$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- Pour tout x de $[a, b], si \ \ f(x) \leq 0$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq 0$
- Pour tout x de $[a, b], \ si \ f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
- Si m et M sont deux réels tels que pour tout $x \in [a, b]$ $m \leq f(x) \leq M$ alors

  $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

EXERCICE D'APPLICATIONS :

1) Dans chacun des cas, calculer les intégrales suivantes :

$A = \int_0^1 e^{1-4t}dt, B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sint(cost)^5 dt\,, C = \int_0^5 (x|2x-5| - x|x-3|)dx \quad D = \int_2^0 \frac{dt}{\sqrt{t+2}} \quad E = \int_2^3 \sqrt{2x+1}dx$

2) Soit les intégrales $A = \int_0^\pi cos^2 x\ dx$ et $B = \int_0^\pi sin^2 x\ dx$

Calculer $A + B$ et $A - B$ et en déduire les valeurs de A et B

TAFAD : Choisir 3 à 5 exercices du livre au programme.

LEÇON 2: METHODES DE CALCULS DES INTEGRALES

DUREE : 100 minutes

COMPETENCE A ACQUERIR PAR LES ELEVES :

A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de :

- Calculer l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle fermé sans connaître la primitive de cette fonction
- Calculer une intégrale en utilisant l'intégration par partie
- Calculer une intégrale par changement de variable.

PRE-REQUIS :

- Primitives d'une fonction
- Continuité d'une fonction sur un intervalle fermé
- Calcul d'une intégrale connaissant une primitive

SITUATION PROBLEME :

Une pièce de verre, initialement froide, est portée rapidement à la température de 550°C puis on la laisse immédiatement refroidir. On admet alors que le temps t_2 nécessaire pour obtenir un refroidissement de 550°C à 450°C est donné en millisecondes, par l'intégrale

$t_2 = \int_0^{100} xe^{0,07x}dx$. Paul un élève de la classe de terminale estime qu'il faut exactement 22min 23 secondes pour refroidir la pièce de 550°c à 450°C. A-t-il raison ?

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

Activité 1) On se propose de calculer $A = \int_0^{100} xe^{0,07x}dx$

On considère les fonctions continues et dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$

a) Rappeler la formule donnant la dérivée de la fonction $U \times V$
b) En déduire que pour tout $x \in [0, 100]$, on a :

$$\int_0^{100} U(x) \times V'(x)dx = [U(x) \times V(x)]_0^{100} - \int_0^{100} U'(x) \times V(x)\, dx$$

c) En posant $U(x) = x$ et $V'(x) = e^{0,07x}$, montrer que

$$\int_0^{100} xe^{0,07x}dx = [\frac{x}{0,07}e^{0,07x}]_0^{100} - \frac{1}{0.07}\int_0^{100} e^{0,07x}dx$$

d) En déduire $A = \int_0^{100} xe^{0,07x}dx$

e) En déduire la solution de la situation problème

3) On se propose de calculer $J = \int_{-1}^{0} \frac{t}{\sqrt{2t+3}} dt$ et on pose $u = 2t + 3$,

a) Calculer du en fonction de dt

b) Montrer que si $t = -1$ alors $u = 1$ et déterminer la valeur de u si $t = 0$

c) Montrer que $J = \frac{1}{4}\int_{1}^{3}\left(\sqrt{u} - \frac{3}{\sqrt{u}}\right) du$

d) En déduire que $J = \frac{4}{3} - \sqrt{3}$

Solution : 1)

a) $[U(x) \times V(x)]' = U'(x) \times V(x) + V'(x) \times V(x)$

b) D'après 1) on a : $[U(x) \times V(x)]' = U'(x) \times V(x) + V'(x) \times V(x)$ d'où

$\int_{0}^{100} [U(x) \times V(x)]' dx = \int_{0}^{100} U'(x) \times V(x) dx + \int_{0}^{100} V'(x) \times V(x) dx$ d'où

$$\int_{0}^{100} U(x) \times V'(x) dx = [U(x) \times V(x)]_{0}^{100} - \int_{0}^{100} U'(x) \times V(x)\, dx$$

c) $\begin{cases} U(x) = x \\ V'(x) = e^{0,07x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} U'(x) = 1 \\ V(x) = \frac{1}{0,07} e^{0,07x} \end{cases}$ ainsi

$$\int_{0}^{100} x e^{0,07x} dx = [\frac{x}{0,07} e^{0,07x}]_{0}^{100} - \frac{1}{0.07}\int_{0}^{100} e^{0,07x} dx$$

d) $\int_{0}^{100} x e^{0,07x} dx = \left[\frac{x}{0,07} e^{0,07x}\right]_{0}^{100} - \frac{1}{0.07}\int_{0}^{100} e^{0,07x} dx = \left[\frac{x}{0,07} e^{0,07x}\right]_{0}^{100} - \left(\frac{1}{0.07}\right)^{2} [e^{0,07x}]_{0}^{100}$

$$= \frac{100}{0,07} e^{7} - \left(\frac{1}{0,07}\right)^{2} (e^{7} - 1)$$

e) **<u>Solution situation problème :</u>** On a :

$$t_2 = \left(\int_{0}^{100} x e^{0,07x} dx\right) ms = \left[\frac{100}{0,07} e^{7} - \left(\frac{1}{0,07}\right)^{2} (e^{7} - 1)\right] ms = 1343029{,}19 ms$$

$$= 22 min 23 s$$

2-

a) $u = 2t + 3 \Rightarrow du = d(2t + 3) \Longrightarrow du = 2dt$

b) $\begin{cases} t = -1 \\ t = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u = -1 \times 2 + 3 = 1 \\ u = 0 \times 2 + 3 = 3 \end{cases}$

c) $J = \int_{1}^{3} \frac{\frac{u-3}{2}}{\sqrt{t}} \times \frac{du}{2} = \frac{1}{4}\int_{1}^{3} \frac{u-3}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{4}\int_{1}^{3}\left(\sqrt{u} - \frac{3}{\sqrt{u}}\right) du = \frac{1}{4}\left[\frac{2}{3} x\sqrt{x} - 6\sqrt{x}\right]_{1}^{3} = \frac{4}{3} - \sqrt{3}$

RESUME :

1) Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle K telles que les dérivées u' et v' sont continues sur K, a et b deux éléments de K.

$$\int_a^b u(x) \times v'(x)dx = [u(x) \times v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \times v(x)\, dx$$

2) Pour calculer l'intégrale $\int_a^b f(\alpha x + \beta)dx$ $(\alpha \neq 0)$ on peut utiliser le procédé suivant
   - Faire un changement de variable : $u = \alpha\, x + \beta$ et on obtient $du = \alpha\, dx$
   - Utiliser l'égalité : $\int_a^b f(\alpha x + \beta)dx = \int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} \frac{1}{\alpha} f(u)du$
3) Soit f une fonction continue sur un intervalle K symétrique par rapport à 0. Pour tout a élément de K, on a :
   - Si f est paire, $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$
   - Si f est impaire, $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$

EXERCICE D'APPLICATIONS :

1) A l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\cos x dx, \qquad B = \int_0^2 (4x+6)e^{2x}dx \qquad C = \int_1^{e^2} \sqrt{x}\ln x\, dx$$

2) A l'aide de deux intégrations par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$D = \int_0^{\pi} x^2 \cos x\, dx, \qquad E = \int_0^1 (3x^2 - x + 1)e^x dx$$

3) A l'aide d'un changement de variable affine, calculer les intégrales suivantes :

$$F = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2\sqrt{2x+1}dx \qquad G = \int_{\frac{5}{3}}^{2} \frac{x^2}{(3x-4)^5}dx$$

TAFAD : Choisir 3 à 5 exercices du livre au programme.

LEÇON 3: APPLICATION : CALCULS D'AIRES

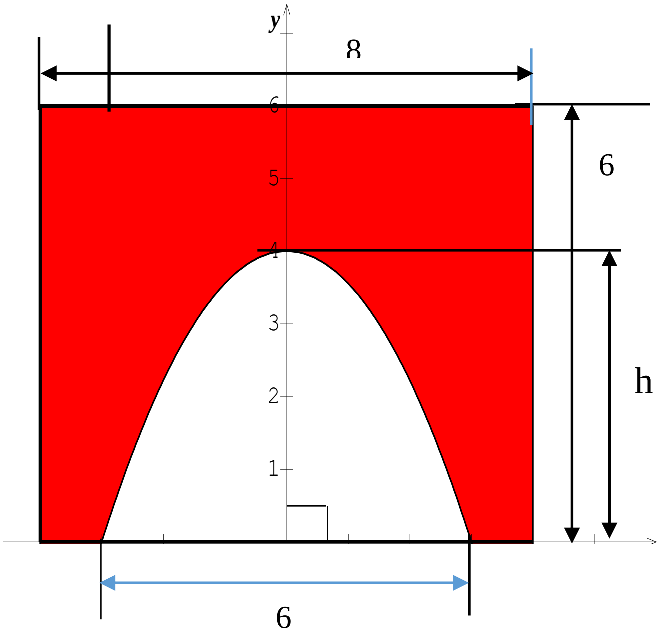
DUREE : 50 minutes

COMPETENCE A ACQUERIR PAR LES ELEVES :

A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de :

- Calculer l'aire d'une portion du plan donnée

SITUATION PROBLEME :



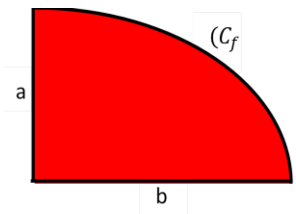
Une autoroute doit couper une voie ferrée. Une entreprise est chargée de construire un pont par-dessus la voie ferrée pour laisser passer l'autoroute. La figure ci-contre est la vue de face, on donne :Longueur totale : 8m Hauteur totale : 6m

L'ouverture est limitée par un arc de parabole de hauteur $h = 4m$ et d'axe de symétrie $(0y)$

Pour des raisons de sécurité, l'aire de l'ouverture doit être inférieur ou égale au tiers de l'aire totale de la façade.

Montrer que cette ouverture correspond aux normes du cahier des charges

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :



On démontrer et nous admettons que si f est une parabole, alors l'aire de la partie hachurée est $A = \frac{2}{3}ab$.

On considère la figure de la situation problème précédente . Le repère orthogonal d'axes $(0x)$ et $(0y)$ où 1cm représente 1m et on admet qu'une équation de la parabole dans ce repère est de la forme $y = ax^2 + c$

1) Calculer l'aire de la partie non hachurée
2) Montrer que L'équation de la parabole est $y = -\frac{4}{9}x^2 + 4$
3) Calculer $I = \int_{-3}^{3}\left(-\frac{4}{9}x^2 + 4\right)dx$
4) Quel remarque pouvez-vous faire et en déduire une interpréter graphiquement le résultat obtenu
5) En déduire la solution de la situation problème

Solution :

1) L'aire de la partie du plan non hachurée est : $A = 2 \times \frac{2}{3} a \times b = 2 \times \frac{2}{3} \times 4 \times 3 = 16m^2$

2) Lorsque $x = 0$ alors $y = 4$ ainsi $c = 4$ et lorsque $x = 3$ alors $y = 0$ donc $0 = 9a + 4$ ainsi $a = -\frac{4}{9}$. L'équation de la parabole est $y = -\frac{4}{9}x^2 + 4$

3) $I = \int_{-3}^{3} \left(-\frac{4}{9}x^2 + 4\right) dx = \left[-\frac{4x^3}{27} + 4x\right]_{-3}^{3} = (-4 + 12) - (4 - 12) = 16$

4) L'aire de la partie non hachurée est $A = \int_{-3}^{3} \left(-\frac{4}{9}x^2 + 4\right) dx$.

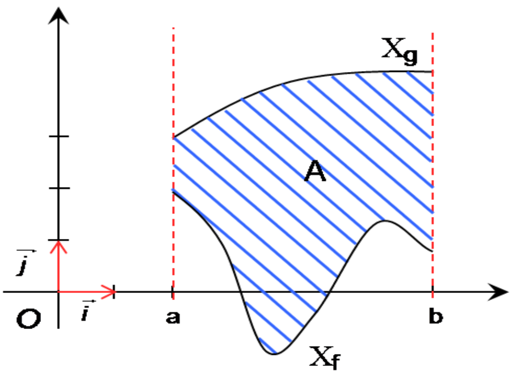
Interprétation graphique : L'aire de la partie non hachurée est égale à l'aire de portion du plan comprise entre les droites d'équations $x = -3, x = 3$ et (C_f)

5) Solution de la situation problème :

L'aire de ouverture est de $16m^2$. Cette ouverture correspond aux normes de sécurité puisque : $16 \leq \frac{1}{3} \times 48$

RESUME : Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J), f et g deux fonction définies et continues sur un intervalles $[a\,; b]$

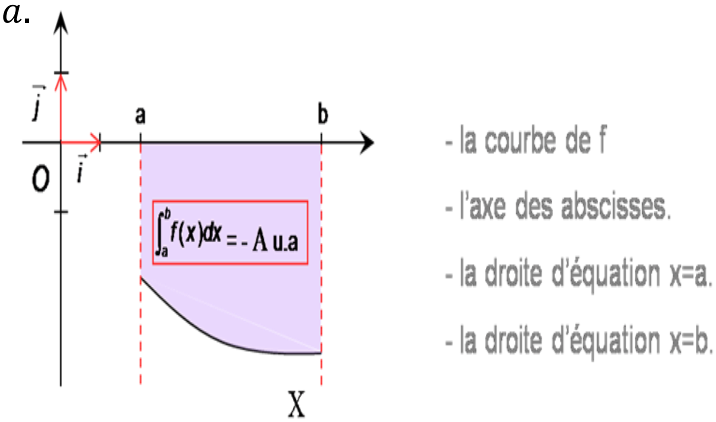
1) L'unité d'aire (u.a.) est l'aire du rectangle de dimension respectives OI et OJ



2) Si $f \leq g$ sur $[a\,; b]$ (la courbe de f est en dessous de celle de g sur $[a, b]$) alors l'aire de la portion du plan délimitée par les droites $x = a$ et $x = b$, les courbes respectives des fonctions f et g est

$$A = [\int^{b} (f(x) - g(x))dx]u.a.$$

3) Si f est négative sur $[a\,; b]$ (la courbe de f est en dessous de l'axe des abscisses $[a, b]$) alors l'aire de la portion du plan délimitée par les droites $x = a$ et $x = b$, la courbe de la fonctions f est

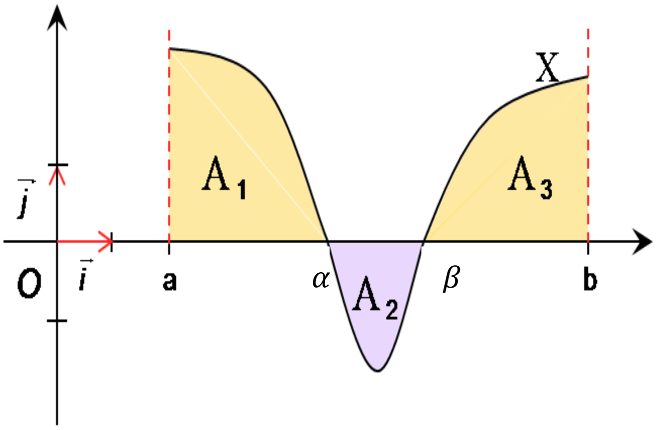


$$A = -\int_{a}^{b} f(x)dx]u.a.$$

4)

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right) u.a. = A_1 - A_2 + A_3$$

$$= \left(\int_a^\alpha f(x)dx - \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\beta^b f(x)dx\right) u.a.$$



EXERCICE D'APPLICATIONS :

On considère les fonctions f et g définie respectivement par $f(x) = x^2 - e^{-x}$ et $g(x) = x^2$

1) Etudier la position de f et g sur $[-2\,;2]$
2) Calculer l'aire du domaine D, délimité par les courbes (C_f), (C_g) les droites d'équation $x = -2$ et $x = 2$.

TAFAD : Choisir 3 à 5 exercices du livre au programme.

LEÇON 4: APPLICATION N°2: CALCULS DE VOLUMES.

DUREE : 50 minutes

COMPETENCE A ACQUERIR PAR LES ELEVES :

A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de calculer le volume d'une portion du plan donnée

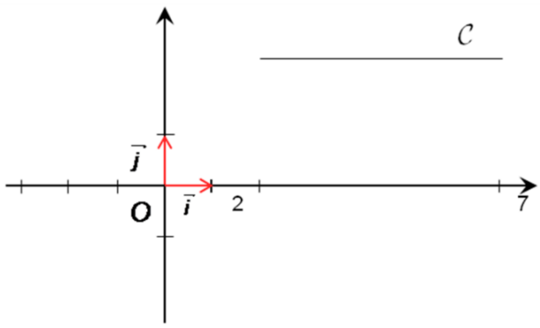
SITUATION PROBLEME :

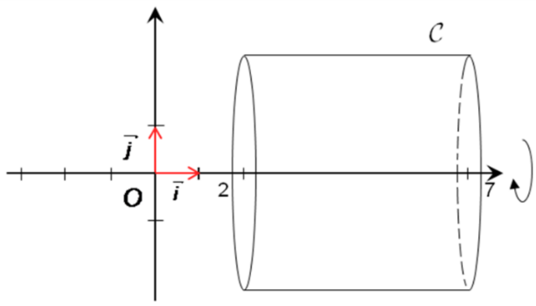
Paul, un élève de la classe de terminale, a tracé dans le plan la courbe de la fonction $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2}+3}$ sur l'intervalle [2 ; 6]. En faisant pivoter la courbe de f autour de l'axe (Ox), il obtient un solide de l'espace et estime qu'il peut en utilisant ce solide, remplir un recevoir de 200litres d'eau en 10 tours. A-t-il raison ?

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

Soit f fonction constante sur l'intervalle $[\,2\,;\,7\,]$ définie par $f\,(x) = 2{,}5$

La rotation de la courbe de f autour de l'axe des abscisses engendre un cylindre comme indique la figure ci-dessous.





1) Calculer le volume du cylindre obtenu
2) Calculer $V = \pi \int_2^7 (f(x))^2 dx$
3) Quel remarque pouvez-vous faire ?

Solution :

1) $V_C = \pi \times r^2 \times h = \pi \times 2{,}5^2 \times (7-2) = 31{,}25\pi m^3$
2)
3) $V = \pi \int_2^7 (f(x))^2 dx =$

$$\pi \int_2^7 (2{,}5)^2 dx$$

$$= \pi \int_2^7 6{,}25dx = \pi[6{,}25x]_2^7 = \pi(6.25 \times 7 - 6.25 \times 2)$$
$$= 31{,}25\pi m^3$$

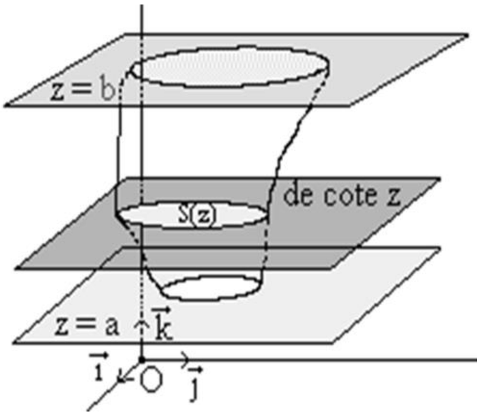
SOLUTION SITUATION PROBLEME :

Le volume du solide obtenu est :

$V = (\int_2^6 [f(x)]^2 dx) cm^3 = (\int_2^6 \left(\frac{x}{2} + 3\right)) cm^3 dx = 20cm^3 = 20l$ ainsi il doit faire 10 tours pour remplir un recevoir de 200l

RESUME :

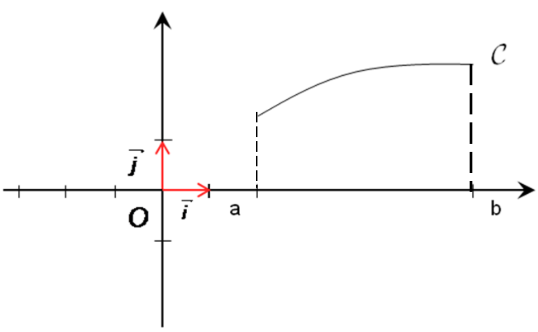
L'espace est muni d'un repère orthogonal $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$
On appelle **unité de volume** noté **u.v.**
Le nombre $\|\vec{x}\| \times \|\vec{\jmath}\| \times \|\vec{k}\|$
On considère un solide limité par les plans d'équation $z = a$ et $z = b$ avec $a < b$.
Pour tout z tel que b , on note P_z le plan perpendiculaire à (Oz) et de cote z , $S(z)$ l'aire de la section du solide par le plan P_z .
Si S est une fonction continue sur [a; b], alors le volume du solide est $V = \int_a^b S(z)dz\, u.v.$

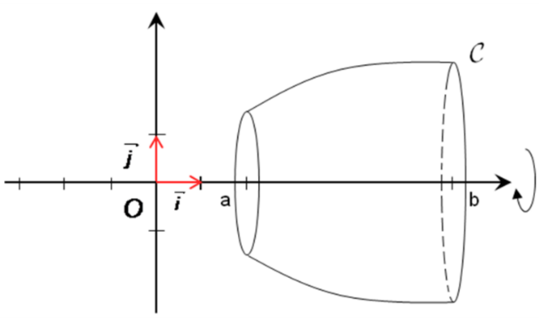


Volume d'un solide engendré par la rotation d'une partie de plan autour d'un axe

- Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J), Soit f une fonction continue sur un intervalle $[\, a\,;\; b\,]$. En faisant pivoter la courbe de f autour de l'axe (Ox), on engendre un solide de révolution, dont le **volume en unité de volume** est :

$V = \int_a^b S(z)dz\, u.v. = \left(\pi \int_a^b (f(x))^2 dx\right) u.v.$





EXERCICE D'APPLICATIONS :

On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty$ par $f(x) = \sqrt{x}$. (D) est l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que $0 \leq x \leq 8 \quad et\ 0 \leq y \leq f(x)$. On fait tourner (D) autour de l'axe (OI). Calculer le volume du solide de révolution engendré.

TAFAD : Choisir 3 à 5 exercices du livre au programme.

Module 25	RELATIONS ET OPERATIONS FONDAMENTALES DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES REELS

CHAPITRE 10

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

INTERET : Ce Chapitre traite des équations différentielles du premier ordre et du deuxième ordre à coefficient constants. Qu'est-ce qu'une équation différentielle ? A quelle condition une fonction est-elle solution d'une équation différentielle ? Quelle est la forme des solutions de ces équations différentielles ? Existe-t-il des solutions vérifiant des conditions données ? Les réponses à ces questions font l'objet de ce chapitre.

MOTIVATION :De nombreux phénomènes physiques, mécaniques, chimiques, biologiques, démographiques, économiques, géométriques, … etc. sont régis par des équations différentielles ou des systèmes différentielles.

PRE-REQUIS :Continuité, dérivabilité et primitives d'une fonction.

LEÇON 1

Présentation et vocabulaire

Durée : 100 minutes

COMPETENCE A ACQUERIR PAR LES ELEVES

- Maitriser le vocabulaire lié aux équations différentielles.
- Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle.

SITUATION PROBLEME

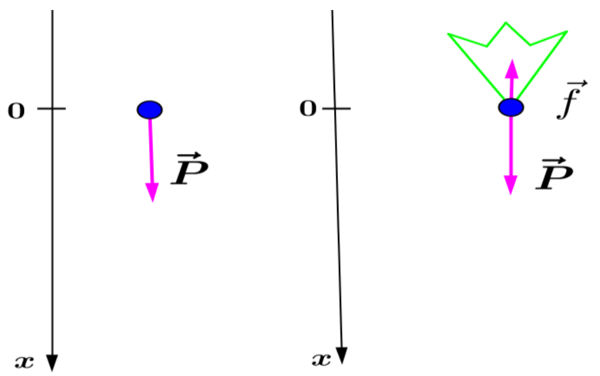
Lorsqu'un corps tombe en chute libre sans frottement, il n'est soumis qu'à l'action de son poids $\vec{P}$. Le cas du parachutiste est différent car il fait subir une force de frottement opposée à sa vitesse. On suppose que le frottement est proportionnel à la vitesse : $\vec{f} = -k\vec{v}$ (k est le coefficient de frottement).

En utilisant le principe fondamental de la mécanique qui stipule que : « la résultante des forces extérieures à un système de masse m est proportionnelle à l'accélération du centre d'inertie. m est le coefficient de proportionnalité », déterminer si possible en fonction du temps $t$écoulé la position $x(t)$de l'objet par rapport à sa position initiale dans chacun des cas ?

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

Activité :

$\vec{P}$,$\vec{x}(t)\vec{v}$(t) et $\vec{a}(t)$ désignent respectivement le poids, le vecteur position, la vitesse et l'accélération à l'instant t du corps qui tombe en chute libre. L'accélération est la dérivée de la vitesse par rapport au temps et la vitesse est la dérivée du vecteur position par rapport au temps.



I) **Premier cas** : « Le corps tombe en chute libre sans frottement »

1) Par le principe fondamental de la mécanique on a : $\vec{P} = m\,\vec{a}$. Justifier en utilisant la figure ci-après que cette relation est équivalente à $mg = ma$, où g est la constante de gravitation et a est l'accélération.

2) En déduire la dérivée $v'(t)$ (ou $\frac{dv(t)}{dt}$) en fonction de g.

3) Que représente respectivement$v(t)$ et $x(t)$ pour la dérivée $v'(t)$ (ou $\frac{dv(t)}{dt}$) ?

4) En déduire $v(t)$ et une solution au problème posé?

II) **Deuxième cas** : « Le parachutiste tombe en chute libre avec frottement »

1) Par le principe fondamentale de la mécanique on a : $\vec{P} + \vec{f} = m\,\vec{a}$. Justifier en utilisant la figure ci-après que cette relation est équivalente à $mg - kv = ma$, où g est la constante de gravitation et a est l'accélération.

2) a) Que représente respectivement la vitesse v et l'accélération a pour $x(t)$?

b) Déduire de la relation précédente une relation entre $x'(t)$et $x''(t)$.

Quel nom donne-t-on à une telle relation ?

4) Peut-on déduire de cette relation une solution au problème posé (c'est-à-dire $x(t)$ en fonction de t) ? Si oui, comment ? Si oui, est-elle unique ?

1. Une équation différentielle est une relation entre une fonction (dérivable ou plusieurs fois dérivables) et quelques une de ses dérivées successives. La fonction inconnue est souvent notée $y$et ses dérivées successivesy', y'' …..
2. Une équation différentielle est dite d'ordre $n$si le plus grand ordre des dérivées intervenant dansla relation est$n$.
3. Une solution d'une équation différentielle sur un intervalle ouvert I est toute fonction vérifiantcette équation différentielle sur I.
4. Intégrer ou résoudre une équation différentielle sur un intervalle ouvert K, c'est déterminer l'ensemble des solutions sur K de cette équation différentielle
5. Une équation différentielle sera dite :
   - linéaire : si elle est une combinaison linéaire d'une fonction inconnue et ses dérivées.
   - à coefficients constants : si les coefficients de l'inconnue et de ses dérivées sont des constantes. Au cas contraire, elle est dite à coefficients variables.
   - sans second membre :si le second membre est nul (lorsque ayant renvoyé d'un côté de l'inconnue et ses dérivées, l'autre membre est nul). Au cas contraire, elle est dite avec second membre.
6. Résoudre certains types d'équations revient à déterminer les primitives.
   Soit f une fonction,
   - Les solutions de l'équation différentielle $y' = f(x)$sont les primitives de$f$.
   - Les solutions de l'équation différentielle $y'' = f(x)$sont les primitives des primitives de f (i.e si F est une primitive de f alors les solutions sont les primitives de : $x \mapsto F(x) + c$,c est une constante réel .

RESUME

Exemple 1:

Recopier et compléter ce tableau est précisant l'ordre de l'équation différentielle et en répondant par oui ou par non aux questions posés.

Equations différentielles	Ordre	Est-elle linéaire ?	Est-elle à coefficient constant ?	Sans second membre ?
$(\boldsymbol{E_1}) : \boldsymbol{y' = x\cos 2x}$	1	oui	oui	non
$(\boldsymbol{E_2}) : \boldsymbol{y'' = e^{3x}}$	2	oui	oui	non
$(\boldsymbol{E_3}) :\ y' + 4y = 0$	1	oui	oui	oui
$(\boldsymbol{E_4}) : y''(x) - 8y'(x) + 16y(x) = 0$	2	oui	oui	oui
$(\boldsymbol{E_5}) : xh'' + (h')^2 - 4h = 2x$	2	non	non	non
$(\boldsymbol{E_6})\ \boldsymbol{f^{(3)} + f^{(2)} - 2f = x^2 + 1}$	3	oui	oui	non

Exemple 2:

On considère les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-4x}$;
$g(x) = (ax+b)e^{4x}$, *a et b étant des réels,* $h(x) = x^2$.

1. Calculer $f'(x)$ puis montrer que f est solution de l'équation $y' + 4y = 0$.

2. Calculer $g'(x)$, $g''(x)$ puis déterminer les réels a et b tel que g soit une solution de $y''(x) - 8y'(x) + 16y(x) = 16xe^{4x}$.

3. Montrer que $xh''(x) + \left(h'(x)\right)^2 - 4h(x) = 2x$.

Solution:

1. On a : $f'(x) = -4e^{-4x}$, $f'(x) + 4f(x) = -4e^{-4x} + 4e^{-4x} = 0$

Donc f est une solution de l'équation $y' + 4y = 0$.

2. On a $g'(x) = (4ax + a + 4b)e^{4x}$, $g''(x) = (16ax + 8a + 16b)e^{4x}$.

$$g''(x) - 4g'(x) + 16g(x)$$
$$= (16ax + 8a + 16b)e^{4x} + (-16ax - 4a - 16b)e^{4x} + (16ax + 16b)e^{4x}$$
$=(16ax + 4a + 16b)e^{4x}$.

g soit une solution de $y''(x) - 4y'(x) + 16y(x) = 16xe^{4x}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16a = 16 \\ 4a + 16b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -\frac{1}{4} \end{cases} \text{et } g(x) = \left(x - \frac{1}{4}\right)e^{4x}.$$

3. Montrons que $xh''(x) + \left(h'(x)\right)^2 - 4h(x) = 2x$.

On a $h'(x) = 2x$, $h''(x) = 2$ et

$$xh''(x) + \left(h'(x)\right)^2 - 4h(x) = 2x + (2x)^2 - 4x^2 = 2x + 4x^2 - 4x^2 = 2x.$$

Donc h est une solution de $xy''(x) + \left(y'(x)\right)^2 - 4y(x) = 2x$

Exemple 3:

1) Résoudre l'équation différentielle $(\boldsymbol{E_1})$ **:** $\boldsymbol{y' = \cos 2x}$ puis déterminer la solution de cette équation qui prend la valeur 1en $\frac{\pi}{6}$.
2) Résoudre l'équation différentielle $(\boldsymbol{E_2})$ **:** $\boldsymbol{y'' = e^{3x}}$puis déterminer la solution de cette équation dont la courbe passe par le point$A(0; 1)$ et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -x + 7$.

Solution:

1) Les solutions de l'équation différentielle $(\boldsymbol{E_1})$ **:** $\boldsymbol{y' = \cos 2x}$ **sont les primitives** $\boldsymbol{f}$ **de la fonction :**$\boldsymbol{x \longmapsto \cos 2x}$ **, c'est-à-dire** $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{2}sin\ 2x + C}$, (C$\in \mathbb{R}$).

f prend la valeur 1 en $\frac{\pi}{6}$ si et seulement si $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3} += 1 \Leftrightarrow C = 1 - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{4}$ et $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{2}sin\ 2x} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{4}$.

2) $(\boldsymbol{E_2})$ **:** $\boldsymbol{y'' = e^{3x} \Leftrightarrow y' = \frac{1}{3}e^{3x} + A \Leftrightarrow y = \frac{1}{9}e^{3x} + Ax + B}$ $(\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$

Les solutions de l'équation différentielle $(\boldsymbol{E_2})$ **:** $\boldsymbol{y'' = e^{3x}}$ sont les fonctions f :

$f(x) = \boldsymbol{\frac{1}{9}e^{3x} + Ax + B}$ $(\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$

La courbe de $f$passe par le point$A(0; 1)$ et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -x + 7$ si et seulement si

$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{9} + B = 1 \\ \frac{1}{3} + A = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = \frac{8}{9} \\ A = -\frac{4}{3} \end{cases}$ et $f(x) = \boldsymbol{\frac{1}{9}e^{3x} - \frac{4}{3}x + \frac{8}{9}}$.

.

LEÇON 2

Equations du type $f' = af$

Durée : 100 minutes

COMPETENCE A ACQUERIR PAR LES ELEVES

- Résoudre les équations différentielles du type :$f' = af$.
- Déterminer la solution qui obéit à des conditions initiales données.

SITUATION PROBLEME

La population du Cameroun était de 20 millions d'habitants en 2010 et est de 25 millions en 2020. Une étude a montré que la vitesse d'accroissement de la population est proportionnelle au nombre d'habitants. Dans ces conditions, en quelle année la population du Cameroun atteindra 40 millions ?

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

Désignons par $\boldsymbol{h(t)}$ le nombre de millions d'habitants à l'instant t et a le coefficient de proportionnalité de la vitesse d'accroissement de la population au nombre d'habitants.

1) a) Que représente la vitesse d'accroissement de la population pour la fonction$\boldsymbol{h}$.
   b) Exprimer $\boldsymbol{h'(t)}$ en fonction de $\boldsymbol{h(t)}$et$\boldsymbol{a}$.
   c) L'équation différentielle dont $\boldsymbol{h}$ est-elle ainsi une solution est-elle linéaire à coefficient constant et sans second membre ? Préciser son ordre.

2) Pour tout réel$\boldsymbol{k}$ **,** montrons que toute fonction $\boldsymbol{f}$ définie sur $\mathbb{R}$par $\boldsymbol{f(x) = ke^{ax}}$ est solution de l'équation différentielle$\boldsymbol{(E)}$: $\boldsymbol{y' = ay}$.

3) Soit $\boldsymbol{h}$ une solution de $\boldsymbol{(E)}$et$\boldsymbol{g}$la fonction définie par$\boldsymbol{g(x) = h(x)e^{-ax}}$**.**

a) Montrer que $\boldsymbol{g'(x) = 0}$puis en déduire que$\boldsymbol{g(x) = k}$**,** $\boldsymbol{k}$étant une constante réelle**.**

b) En déduire la forme générale de $\boldsymbol{h(t)}$enfonction de$\boldsymbol{t}$**.**

4) On a $\boldsymbol{h(t) = ke^{at}}$

a) Sachant que $\boldsymbol{h(2010) = 20}$déduire que $\boldsymbol{k = 20e^{-2010a}}et\boldsymbol{h(t) = 20e^{a(t-2010)}}$**.**

b) Sachant que $\boldsymbol{h(2010) = 20}$ **et** $\boldsymbol{h(2020) = 25}$déduire que $\boldsymbol{a = \frac{1}{10}\ln\frac{5}{4}}$et

$\boldsymbol{h(t) = 20e^{\frac{(t-2010)}{10}\ln\frac{5}{4}}}$**.**

c) Donne une solution au problème posé à savoir « **Dans ces conditions, en quelle année la population du Cameroun atteindra 40 millions ?** »

1. Une équation différentielle pouvant se mettre sous la forme $y' = ay$ où a est un réel non nul est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficient constant.
2. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ $(a \in \mathbb{R})$ sont les fonctions : $x \mapsto ke^{ax}$ $(k \in \mathbb{R})$.
3. Pour tout couple $(x_0; y_0)$ de nombres réels, l'équation différentielle $y' = ay$ $(a \in \mathbb{R})$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur y_0 en x_0 .
C'est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par f : $x \mapsto y_0e^{a(x-x_0)}$.

RESUME

Exemple 1:
Dans chacun des cas suivants, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle et déterminer la solution vérifiant la condition initiale donnée.
a) $y' = y$ et y(0)=1 ; b) $y'\sqrt{2} - y\sqrt{3} = 0$ et $y(2) = 10$;
c) $y' + 3y = 0$ et $y(1) = 1$; d) $y' + yln\,2 = 0$ et $y(1) = -2$
Solution:

Equations différentielles	Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle sont les fonctions :	La solution vérifiant la condition initiale.
a) $y' = y$	$\boldsymbol{x \mapsto f(x) = ke^{x}}$ $(k \in \mathbb{R})$	$\boldsymbol{f(0) = 1 \Leftrightarrow k = 1}$ **et** $\boldsymbol{f(x) = e^{x}}$
b) $y'\sqrt{2} - y\sqrt{3} = 0$	$\boldsymbol{x \mapsto f(x) = ke^{\frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}}$ $(k \in \mathbb{R})$	$\boldsymbol{f(2) = 10 \Leftrightarrow k = 10e^{\frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}}$ **et** $\boldsymbol{f(x) = 10e^{\frac{(x-2)\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}}$
c) $y' + 3y = 0$	$\boldsymbol{x \mapsto f(x) = ke^{-3x}}$ $(k \in \mathbb{R})$	$\boldsymbol{f(1) = 1 \Leftrightarrow k = e^{3}}$ **et** $\boldsymbol{f(x) = e^{-3(x-1)}}$
d) $y' + yln\,2 = 0$	$\boldsymbol{x \mapsto f(x) = ke^{-xln2}}$ $(k \in \mathbb{R})$	$\boldsymbol{f(-2) = 1 \Leftrightarrow k = e^{-2ln2}}$ **et** $\boldsymbol{f(x) = e^{-(x+2)ln2}}$

Exemple 2:
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y" + 2y' = 0$ et déterminer la solution vérifiant $y(0) = y'(0) = 1$.
Solution:

On a: y''+2y'=0 ⇔ (y')' $= -2y'$ ⇔ $y' = ke^{-2x}$ $(k \in \mathbb{R})$. Par conséquent, les solutions de $y" + 2y' = 0$ sont les primitives f sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $x \longmapsto ke^{-2x}$; c'est-à-dire les fonctions : $\boldsymbol{x \longmapsto f(x) = -\frac{k}{2}e^{-2x} + C}$ $(k \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R})$.

Déterminons la solution vérifiant $y(0) = y'(0) = 1$.

$\boldsymbol{f'(x) = ke^{-2x},\ f(0) = f'(0) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{k}{2} + C = 1 \\ k = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = \frac{3}{2} \\ k = 1 \end{cases}}$

Cette solution est la fonction : $\boldsymbol{x \longmapsto f(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{3}{2}}$.

LEÇON 3

Equations du type $af'' + bf' + cf = 0$

Durée : 100 minutes

COMPETENCE A ACQUERIR PAR LES ELEVES

- Résoudre les équations différentielles du type :$af" + bf' + cf = 0$.
- Déterminer la solution qui obéit à des conditions initiales données.

SITUATION PROBLEME

Un mobile se déplace sur un axe horizontal $(X'X)$ avec un mouvement uniformément varié tel qu'en tout instant t, l'accélération est proportionnelle à la position du mobile à cet instant de coefficient $-\frac{\pi^2}{4}$. Après une seconde il est à $2m$ de position initiale et deux secondes après sa mise en mouvement il est à nouveau à sa position initiale. Un second mobile se déplace également sur un axe horizontal $(X'X)$ avec un mouvement uniformément varié tel qu'en tout instant t, l'accélération est proportionnelle à la position du mobile à cet instant de coefficient$\mathbf{100}$. Il part de sa position initiale avec une vitesse de$\boldsymbol{20m/s}$.
Quelle est la vitesse initiale du premier mobile? Quelle est la vitesse du second mobile après trois seconde?

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

On désigne respectivement par $\boldsymbol{x(t)}$ et $\boldsymbol{p(t)}$ les positions du premier et du second mobile à l'instant t.

1) Justifier que les fonctions$\boldsymbol{t \mapsto x(t)}$ et $\boldsymbol{t \mapsto p(t)}$ sont respectivement solution des équations différentielles$\boldsymbol{(E_1): y'' + \frac{\pi^2}{4}y = 0}$ et$\boldsymbol{(E_2): y'' - 100y = 0.}$

2) Soit $\boldsymbol{w = \frac{\pi}{2}}$et $\boldsymbol{w^2 = \frac{\pi^2}{4}.}$

a) Vérifier que, pour tous réels $\boldsymbol{A}$et $\boldsymbol{B}$, la fonction $\boldsymbol{t \mapsto A\cos wt + B\sin wt}$est solution de $\boldsymbol{(E_1): y'' + \frac{\pi^2}{4}y = 0.}$

b) Soit $\boldsymbol{y}$une solution de $\boldsymbol{(E_1)}$et$\boldsymbol{z}$la fonction : $\boldsymbol{t \mapsto z(t) = y(t) - y(0)A\cos wt - \frac{1}{w}y'(0)\sin wt}$

i. Démontrer que z est solution de (E_1).
ii. Calcule la dérivée de $w^2z^2 + (z')^2$ et en déduire que $w^2z^2 + (z')^2$ est une fonction constante.
iii. Démontrer que : $z(0) = 0$et $z'(0) = 0$.
iv. En déduire que : $w^2z^2 + (z')^2$ et z sont des fonctions nulles et établir que y est de la forme : $\boldsymbol{t \mapsto A\cos wt + B\sin wt.}$

c) On a $\boldsymbol{x(t) = A\cos wt + B\sin wt}$, $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$sont des réels.

i. Sachant que $\boldsymbol{x(1) = 2}$et $\boldsymbol{x(2) = 0}$, en déduire $\boldsymbol{A = 0}$,$\boldsymbol{B = 2}$ **et** $\boldsymbol{x(t) = 2\sin\frac{\pi}{2}t}$.

ii. Calculer $\boldsymbol{x'(t)}$ et en déduire la vitesse initiale du premier mobile.

3) Soit $\boldsymbol{w = 10}$ et $\boldsymbol{w^2 = 100}$

a) Vérifier que, pour tous réels $\boldsymbol{A}$et $\boldsymbol{B}$, la fonction $\boldsymbol{t \mapsto Ae^{wt} + Be^{-wt}}$est solution de $\boldsymbol{(E_2): y'' - 100y = 0}$.

b) Soit $\boldsymbol{y}$une solution de $(\boldsymbol{E_2})$et$\boldsymbol{z}$la fonction : $\boldsymbol{t \mapsto z(t) = y(t)e^{-wt}}$

i. Démontrer que $\boldsymbol{z'}$ est solution del'équation$\boldsymbol{f' + 2wf = 0}$.

ii. En déduire que z' est de la forme $\boldsymbol{t \mapsto ke^{-2wt}}$, $\boldsymbol{(k \in \mathbb{R})}$ **et** $z(t) = -\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{2w}}\boldsymbol{e^{-2wt}}$, $\boldsymbol{(k \in \mathbb{R})}$.

iii. Etablir que y est de la forme : $\boldsymbol{t \mapsto Ae^{wt} + Be^{-wt}}$, $\boldsymbol{(A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})}$ **.**

c) On a: $\boldsymbol{p(t) = Ae^{wt} + Be^{-wt}}$, $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$sont des réels.

i. Sachant que$\boldsymbol{p(0) = 0}$, en déduire$\boldsymbol{A + B = 0}$.

ii. Calculer$\boldsymbol{p'(t)}$. Sachant que$\boldsymbol{p'(0) = 20}$, en déduire $\boldsymbol{A - B = 2}$, $\boldsymbol{A = 1}$et $\boldsymbol{B = -1}$.

iii. En déduire la vitesse du second mobile après trois secondes.

RESUME

1. Une équation différentielle pouvant se mettre sous la forme$ay'' + by' + cy = 0$(où a est un réel non nul, b et c des réels) est appelée équation différentielle linéaire du second ordre à coefficient constant et sans second membre.

2.Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + w^2y = 0$ $(w \in \mathbb{R}^*)$ sont les fonctions :$x \mapsto A\cos wt + B\sin wt (A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$.

3. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' - w^2y = 0$ $(w \in \mathbb{R}^*)$ sont les fonctions :$x \mapsto Ae^{wx} + Be^{-wx} (A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$.

4.On appelle équation caractéristique de l'équationdifférentielle$ay'' + by' + cy = 0$, l'équation d'inconnue r : $ar^2 + br + c = 0$.

5. Pour résoudre sur $\mathbb{R}$ une équation différentielle du type$ay'' + by' + cy = 0$, on peut résoudre l'équation caractéristique$ar^2 + br + c = 0$ et utiliser le tableau suivant :

$\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}$	**Solutions de l'équation caractéristique**	**Solutions de l'équation différentielle**
$\boldsymbol{\Delta = 0}$	une solution double : r	$x \mapsto (Ax + B)e^{rx} (A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$
$\boldsymbol{\Delta} > 0$	deux solutions réelles : r_1 et r_2	$x \mapsto Ae^{r_1x} + Be^{r_2x} (A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$
$\boldsymbol{\Delta} < 0$	Deux solutions complexes conjuguées : $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$	$x \mapsto (A\cos\beta x + B\sin\beta x)e^{\alpha x}$ $(A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$

Exemple 1:

1) Dans chacun des cas suivants, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

a) $2y'' - y = 0$; b) $9y'' + 4y = 0$; c) $4y'' + 4y' + y = 0$; d) $y'' + 4y' + 5y = 0$;

e) $3y'' + 5y' - 2y = 0$.

2) Déterminer la solution de l'équation **d)** vérifiant la condition initiale $y(0) = 1 \text{et} y'(0) = -1$.

Solution:

Equation différentielle	Equation caractéristique	Solutions équation caractéristique	Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions :
a) $2y'' - y = 0$	$r^2 - 1 = 0$	Les reels: 1 et -1	$x \mapsto Ae^{x} + Be^{-x}$, $(A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$
b) $9y'' + 4y = 0$	$9r^2 + 4 = 0$	Les complexes: $\frac{2}{3}i$ et $\frac{-2}{3}i$	$x \mapsto (A\cos\frac{2}{3}x + B\sin\frac{2}{3}x)e^{0x}$ $= A\cos\frac{2}{3}x + B\sin\frac{2}{3}x$ $(A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$
c) $4y'' + 4y' + y = 0$	$4r^2 + 4r + 1 = 0$	Le réel : $-\frac{1}{2}$	$x \mapsto (Ax + B)e^{-\frac{1}{2}x}$, $(A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$
d) $y'' + 4y' + 5y = 0$	$r^2 + 4r + 5 = 0$	Les complexes: $-2 - i$ et $-2 + i$	$x \mapsto (A\cos x + B\sin x)e^{-2x}$ $(A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$
e) $3y'' + 5y' - 2y = 0$	$3r^2 + 5r - 2 = 0$	Les reels: -2 et $\frac{1}{3}$	$x \mapsto Ae^{-2x} + Be^{\frac{1}{3}x}$, $(A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$

2) Déterminons la solution de l'équation **d)** vérifiant la condition initiale $y(0) = 1 \text{et} y'(0) = -1$.

Les solutions de d) sont les fonctions $f : x \mapsto (A\cos x + B\sin x)e^{-2x}$, $(A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$.

$f'(x) = (-A\sin x + B\cos x))e^{-2x} - 2(A\cos x + B\sin x)e^{-2x} = ((-2A + B)\cos x + (-A - 2B)\sin x)e^{-2x}$.

$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ -2A + B = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \end{cases}$ et cette solution est la fonction f : $x \mapsto (\cos x + \sin x)e^{-2x}$

EXERCICE RESOLU : Equation différentielle de la forme $ay'' + by' + cy = d(x)$ où a, b et c sont des réel et d est une fonction numérique.

Enoncé:

Soit à résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(\boldsymbol{E})$: $\boldsymbol{y'' - 2y - 3y = (10x - 7)e^{-2x}}$

1) Déterminer les réels a et b tel que la fonction $p : x \longmapsto (ax + b)e^{-2x}$ soit solution de l'équation$(\boldsymbol{E})$**.**
2) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f + p$ est solution de l'équation$(\boldsymbol{E})$ si et seulement si f est solution de l'équation différentielle $(\boldsymbol{E'})$: $\boldsymbol{y'' - 2y - 3y = 0}$**.**

3) a) Résoudre $(\boldsymbol{E'})$: $\boldsymbol{y'' - 2y - 3y = 0}$.

b) En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de $(\boldsymbol{E})$.

Solution:

1) Déterminons les réels a et b .

La fonction $p : x \longmapsto (ax+b)e^{-2x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$,

$p'(x) = ae^{-2x} - 2(ax+b)e^{-2x} = (-2ax + a - 2b)e^{-2x}$

$p''(x) = -2ae^{-2x} - 2(-2ax + a - 2b)e^{-2x} = (4ax - 4a + 4b)e^{-2x}$.

$p''(x) - 2p'(x) - 3p(x) = (5ax - 6a + 5b)e^{-2x}$.

p solution de l'équation$(\boldsymbol{E})$

$\Leftrightarrow (5ax - 6a + 5b)e^{-2x} = (\boldsymbol{10x - 7})\boldsymbol{e^{-2x}} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{5a = 10} \\ \boldsymbol{-6a + 5b = -7} \end{cases}$.

Il en découle que $\boldsymbol{a = 2}$, $\boldsymbol{b = 1}$ et $\boldsymbol{p(x) = (2x+1)e^{-2x}}$.

2) On a :

$f + p$ solution de $(\boldsymbol{E}) \Leftrightarrow (f+p)''(x) - 2(f+p)'(x) - 3(f+p)(x) = (10x - 7)e^{-2x}$.

$\Leftrightarrow f''^{(x)} - 2f'^{(x)} - 3f(x) + p''(x) - 2p'(x) - 3p(x) = (10x - 7)e^{-2x}$.

$\Leftrightarrow f''^{(x)} - 2f'^{(x)} - 3f(x) = 0$ car $p''(x) - 2p'(x) - 3p(x) = (10x - 7)e^{-2x}$

$\Leftrightarrow f$ est solution de l'équation différentielle $(\boldsymbol{E'})$: $\boldsymbol{y'' - 2y - 3y = 0}$.

3) a) Résolvons $(\boldsymbol{E'})$: $\boldsymbol{y'' - 2y - 3y = 0}$.

Son équation caractéristique est: $r^2 - 2r - 3$ et a deux solutions réels $\boldsymbol{-1}$ et $\boldsymbol{3}$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de $(\boldsymbol{E'})$ sont les fonctions : $x \longmapsto Ae^{-x} + Be^{3x}$, $(A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$.

b) On en déduit que les solutions sur $\mathbb{R}$ de $(\boldsymbol{E})$ sont les fonctions :

$$\boldsymbol{x \longmapsto Ae^{-x} + Be^{3x} + p(x) = Ae^{-x} + Be^{3x} + (2x+1)e^{-2x}}\text{ , } (\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}).$$

Méthode

Soit (E) une équation différentielle de la forme $ay'' + by' + cy = d(x)$où a, b et c sont des réel et $d$est unefonction numérique d'une variable réelle non nulle.

1. On appelle équation homogène associéeà(E), l'équation sans second membre $ay'' + by' + cy = 0$.

2. On appelle solution particulière de (E)toute solution $p$de (E).

3.On note p une solutionparticulière de (E)et g la forme générale des solutions de l'équation homogène associée à (E).

Les solutionsde (E)sont les fonctions f définies par :$f(x) = g(x) + p(x)$.

4. On sait déjà trouver les solutions de l'équation homogène associéeà (E). Le problème est de trouver unesolution particulière de (E). La forme de la solution particulière dépendessentiellement de la forme du second membre $d(x)$. Voici quelques cas.

- Si $d(x) = ax^2 + bx + c$, chercher $p$sous la forme $p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.
- Si $d(x) = a \cos x + b \sin x$, chercher $p$sous la forme $p(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x$.
- Si $d(x) = ke^{ax}$, chercher $p$sous la forme $p(x) = \alpha\, e^{ax}$.

DEVOIR :

Une tasse de café de température $T_0 = 100°\mathrm{C}$ est posée dans une pièce de température de $T_\infty = 20°\mathrm{C}$. La loi de Newton affirme que la vitesse de décroissance de la température $\frac{dT(t)}{dt}$ est proportionnelle à l'écart entre sa température $T(t)$ et la température ambiante T_∞. Sachant qu'au bout de $3min$ la température du café est passé à $80°\mathrm{C}$, combien de temps faudra-t-il pour avoir un café à $60°\mathrm{C}$?

Module 26 | ORGANISATION ET GESTION DE DONNEES

CHAPITRE 11

STATISTIQUES

INTERET :

Dans la pratique, les méthodes et outils statistiques sont utilisés dans les domaines tels que : l'assurance et les finances pour le calcul des risques ; en médecine pour le comportement des maladies et la validité d'un traitement ; en marketing pour le sondage d'opinion avant un investissement ; en démographie pour le recensement d'une population ; en géophysique pour des prévisions météorologiques ; en production industrielle bref dans presque tous les secteurs socio-politico-économiques.

MOTIVATION :

De nombreuses situations dans la vie courante tels que l'exploitation, l'analyse ou le croisement des données de domaines différents afin de rechercher leurs liens dans des analyses économiques, sociologiques ou de science-politique sur une population nécessitent la maitrise des notions de statistiques.

PREREQUIS :

Calcul de la moyenne, de la variance et l'écart-type d'une série statistique simple à caractère quantitatif et détermination de l'équation réduite d'une droite passant par deux points quelconques.

LEÇON 1

Tableaux à double entrées

Durée : 100 minutes

MOTIVATION

Etude de la collecte de données, leur traitement, leur analyse, l'interprétation des résultats et leur présentation afin de les rendre plus compréhensible par tous.

COMPETENCES

- Regrouper les données d'une série statistique à deux caractères quantitatifs dans un tableau à double entrées.
- Dresser les tableaux marginaux d'une série à deux caractères, puis calculer les paramètres marginaux.
- Calculer les coordonnées du point moyen d'un nuage de série à deux caractères.
- Construire dans le plan le nuage de points d'une série.

PREREQUIS

- Dans un hôpital de la ville de Douala, on a enregistré au cours d'une semaine, le poids de chaque nouveau-né (en kg) du pavillon maternité que voici :
  $3 - 3{,}1 - 3{,}13 - 3{,}4 - 3{,}42 - 3{,}51 - 3{,}8 \ et \ 4$.
- Quel est le poids moyen d'un nouveau-né au cours de cette dite semaine ?
- On a : $\bar{x} = \frac{3+3{,}1+3{,}13+3{,}4+3{,}42+3{,}51+3{,}8+4}{8} = 3{,}42$

SITUATION PROBLEME

Vous êtes élève en classe de terminale scientifique et votre sœur FANI, diplômée de l'école des infirmiers d'état, vient d'être affectée dans un hôpital public de la ville de Douala dans le service maternité. A la fin du premier mois de travail, l'infirmier chef lui remet une fiche d'informations que voici :

Poids (kg)	3,2	3	3,2	3	3	3,4	3,4	3,2	3	3	2,8	3,4	3	3,2	3	3,2	3	3,6	3,2	3,6
Taille (cm)	46	40	41	41	38	46	50	46	40	46	40	50	42	50	46	46	40	50	42	52

Contenant les poids et les tailles des vingt nouveau-nés enregistrés dans cet hôpital au cours de ce mois, lui demandant de déterminer le poids moyen et la taille moyenne de ces vingt nouveau-nés. Ne sachant pas comment le faire, FANI sollicite ton aide afin d'accomplir cette tâche. Aide FANI à déterminer ces moyennes.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

On considère les notes de mathématiques et de chimie obtenues par 20 candidats au baccalauréat série ''D''.

Note de maths x_i	7	8	13	9	10	11	9	11	13	14	16	10	10	12	15	7	8	8	9	7
Note de chimie y_i	5	13	11	13	9	14	13	10	11	8	6	9	7	10	12	15	13	13	10	5

X est le caractère << note obtenue en mathématiques >> et Y est le caractère << note obtenue en chimie >>.

1) Déterminer les ensembles M_x et M_y respectivement des modalités des caractères X et Y.
2) Recopier et compléter le tableau suivant appelé tableau à double entrées par les effectifs non nuls des modalités $(x_i; y_j)$ de la série double. (Par exemple : 3 candidats ont eu 8 en mathématiques et 13 en chimie. Donc l'effectif de la modalité (8 ; 13) est 3.

M_x \ M_y	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	TOTAL
5											
6											
7											
8											

9											
10											
11											
12											
13		3									
14											
15											
TOTAL											20

3) A partir des lignes extrêmes du tableau à double entrées, compléter le tableau linéaire suivant associé à X.

M_x	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	Total
n_i											20

A partir des colonnes extrêmes du tableau à double entrées, compléter le tableau linéaire suivant associé à Y.

M_y	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	total
n_j												20

4) Déterminer les moyennes $\bar{x}$ et $\bar{y}$ respectivement de maths et des sciences de ces candidats.

SOLUTION :

1) $M_x = \{7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16\}$ et $M_y = \{5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15\}$
2) Recopions et complétons le tableau suivant appelé tableau à double entrées par les effectifs non nuls des modalités $(x_i; y_j)$

M_x / M_y	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	TOTAL
5	2										2
6										1	1
7				1							1
8								1			1
9				2							2
10			1		1	1	2				5
11											0
12									1		1
13		3	2								5
14					1						1
15	1										1

TOTAL	3	3	3	3	2	1	2	1	1	1	20

3) A partir des lignes extrêmes du tableau à double entrées, complétons le tableau linéaire suivant associé à X.

M_x	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	Total
n_i	3	3	3	3	2	1	2	1	1	1	20

4) A partir des colonnes extrêmes du tableau à double entrées, complétons le tableau linéaire suivant associé à Y.

M_y	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	total
n_j	2	1	1	1	2	5	0	1	5	1	1	20

RESUME

DEFINITION :

Les données de l'étude simultanée de deux caractères d'une population sont présentées dans un tableau à double entrées ou la modalité d'un individu est un couple (x_i ; y_j) d'effectif n_{ij} (voir tableau en bleu).

X_i / Y_i	x_1	x_2	…	x_i	…	x_m	TOTAL	Fréquences Marginales f_{yj}des y_j
y_1	$n_{1,1}$	$n_{2,1}$	…	$n_{i,1}$	…	$n_{m,1}$	$n_{.,1}$	$n_{.,1}/N$
y_2	$n_{1,2}$	$n_{2,2}$	…	$n_{i,2}$	…	$n_{m,2}$	$n_{.,2}$	$n_{.,2}/N$
. .	. .	. .	…	. .	…	. .	. .	. .
y_j	$n_{1,j}$	$n_{2,j}$	…	$n_{i,j}$	…	$n_{m,j}$	$n_{.,j}$	$n_{.,j}/N$
. .	. .	. .	…	. .	…	. .	. .	. .
y_p	$n_{1,p}$	$n_{2,p}$		$n_{i,p}$		$n_{m,p}$	$n_{.,p}$	$n_{.,p}/N$
TOTAL	$n_{1,.}$	$n_{2,.}$		$n_{i,.}$		$n_{m,.}$	N	1
Fréquences Marginales Des x_i	$n_{1,.}/N$	$n_{2,.}/N$		$n_{i,.}/N$		$n_{m,.}/N$	1	

Les effectifs figurant dans la ligne et la colonne ''TOTAL' 'sont respectivement les effectifs marginaux de la série X et de la série Y. X et Y sont appelées séries marginales.

On remarque que : $\sum_{i,j} n_{i,j} = \sum_j n_{.,j} = \sum_i n_{i,.} = N$

EXEMPLE :

Considérons le tableau à double entrées complété dans la résolution de l'activité d'apprentissage ci-dessus, on a :

$\sum_{i,j} n_{i,j} = 2+3+2+2+2+1+1+1+1+1+1+1+1+1 = 20$

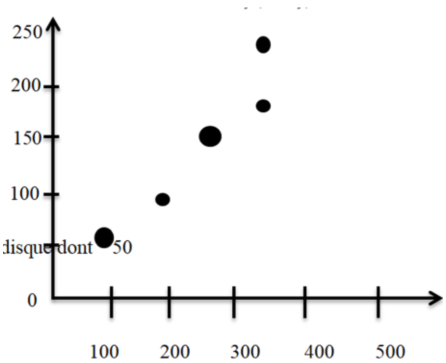
$\sum_j n_{.,j} = 2+1+1+1+2+5+0+1+5+1+1 = 20$

$\sum_i n_{i,.} = 3+3+3+3+2+1+2+1+1+1 = 20$

NUAGE DES POINTS :

On appelle nuage des points associé à une série double $(X\,;Y)$ l'ensemble des points $M_{ij}(x_i; y_j)$ d'effectif non nul. Il existe deux modes de représentation :

- Représentation par points pondérés : on indique à cote de chaque point $M_{ij}(x_i; y_j)$ l'effectif n_{ij}.
- Représentation par tâche : chaque point $M_{ij}(x_i; y_j)$ est représenté par un disque dont l'aire est proportionnelle à l'effectif.



POINT MOYEN :

Le point moyen du nuage des points $M_{ij}(x_i; y_j)$ est le point $G\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{N}\,;\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{N}\right)$, soit $G(\bar{x}; \bar{y})$.

EXERCICES D'APPLICATIONS

<u>EXERCICE 1:</u>

On a relevé dans un petit village dans la ville de Bafoussam, les températures et la pluviométrie au cours de 20 jours du mois de Mars. Les résultats ont été consignés dans le tableau suivant :

Jour	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Température(°)	22	18	20	20	16	22	26	22	18	22	18	26	20	26	18	18	22	26	22	28
Précipitations (mm)	110	132	120	120	210	110	145	132	210	110	132	110	120	120	132	132	120	145	110	210

1) Présenter ces données sous forme d'un tableau à double entrées.
2) Déterminer les séries marginales associées aux caractères x et y.
3) Déterminer les coordonnées du point moyen G.

<u>EXERCICE 2</u> :

Les chiffres d'affaires trimestriels d'une entreprise ont été pour les douze derniers trimestres :

Rang du trimestre x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Chiffre d'affaires (en milliers de francs) y_j	300	450	130	200	280	410	200	250	320	500	210	250

1) Représenter le nuage de points de points de coordonnées $(x_i; y_j)$ associé à cette série double.
2) Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage. Placer G.

LEÇON 2

Ajustement linéaire

Durée : 100 minutes

MOTIVATION

Dans les séries statistiques à deux variables, les ajustements linéaires servent à estimer ou prédire une valeur qu'on n'a pas à partir d'une autre, pour un futur proche ou lointain.

COMPETENCES

- Réaliser un ajustement affine par la méthode de MAYER puis l'utiliser pour prévoir la valeur d'une variable connaissant celle de l'autre.
- Calculer la covariance, le coefficient de corrélation d'une série double.
- Déterminer les équations des droites de régression par la méthode des moindres carrés.
- Apprécier la qualité de la corrélation entre deux variables d'une série double.

PREREQUIS

Ecrire l'équation réduite de la droite passant par les points $A\binom{3}{1}$ et $B\binom{2}{5}$. La droite passant par les points $A\ et\ B$ a pour équation réduite la droite de forme générale

$y = ax + b$ avec $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ soit $a = \frac{5-1}{2-3} = -4$. Alors $b = y_A - ax_A$ soit

$b = 1 + 4 \times 3 = 13$.

Donc $(AB): y = -4x + 13$.

SITUATION PROBLEME

Toto est propriétaire d'une entreprise de vente par correspondance et établit un bilan de son chiffre d'affaire en fonction du nombre de commandes sur les six dernières années. Ce bilan est donné dans le tableau suivant :

Nombre de commandes (x)	1300	1550	1850	1950	2100	2250
Chiffre d'affaire en millions de Francs CFA (y)	14	21	23	25	27	29

Aidez Toto à obtenir une estimation du chiffre d'affaire qu'il réalisera pour 3000 commandes.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

Depuis quelques années une entreprise a mis en place des actions pour prévenir au mieux les risques Professionnels. Le tableau ci-dessus représente l'évolution du nombre annuel d'accidents du travail ayant entrainé un arrêt de travail pour 1000 salariés en équivalent temps plein.

Année	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre annuel moyen d'accidents du travail y_i	108	103	95	90	88	83	79	73	70	67

1) Construire le nuage des points associés à cette série dans un repère orthogonal tel que :
   - En abscisse, 1cm représente 1 rang de l'année.
   - En ordonnée, 1cm représente 10 accidents du travail à partir de la graduation 60.
2) Déterminer les coordonnées du point moyen G.
3) On divise la série en deux sous séries ayant le même nombre de points.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	108	103	95	90	88

x_i	6	7	8	9	10
y_i	83	79	73	70	67

a) Calculer les coordonnées de G_1 et G_2 points moyens respectifs des deux sous-nuages ainsi obtenus.

b) Ecrire une équation de la droite (G_1G_2).

c) Vérifier que $G \in (G_1G_2)$.

d) A l'aide de l'équation de (G_1G_2), estimer le nombre annuel d'accidents du travail en 2018.

SOLUTION :

1) Construisons le nuage des points associés à cette série :
2) $G\left(\frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9+10}{10};\frac{108+103+95+90+88+83+79+73+70+67}{10}\right)$ soit $G(5{,}5; 85{,}6)$

3) $G_1\left(\frac{1+2+3+4+5}{5};\frac{108+103+95+90+88}{5}\right)$ soit $G_1(3;96{,}8)$ et

$G_2\left(\frac{6+7+8+9+10}{5};\frac{83+79+73+70+67}{5}\right)$ soit $G_2(8;74{,}4)$

4) La droite (G_1G_2) est de la forme

$y = ax + b$ avec $a = \frac{74{,}4-96{,}8}{8-3} = -4{,}48$ et

$b = 74{,}4 + 4{,}48 \times 8 = 110{,}24$

Donc

$(G_1G_2): y = -4{,}48x + 110{,}24$.

5) On sait que $G\binom{5{,}5}{85{,}6}$ alors on a : $-4{,}48 \times 5{,}5 + 110{,}24 = 85{,}6$ d'où $G \in (G_1G_2)$

6) L'année 2018 correspond au rang de l'année 14 donc $x = 14$.

On a : $y = -4{,}48 \times 14 + 110{,}24$ soit $y = 47{,}52$ .Donc le nombre annuel d'accidents du travail en 2018 serait 47,52.

RESUME

1) AJUSTEMENT LINEAIRE PAR LA METHODE DE MAYER :

Pour déterminer la droite de MAYER, on procède ainsi :

- Partager la série double initiale en deux sous-séries d'effectifs égaux si N est pair, sinon mettre le couple du milieu, selon votre choix, dans l'une des deux sous-séries.
- Déterminer les points moyens G_1 et G_2 de chacune des sous-séries.
- La droite de MAYER est la droite passant par G_1et G_2 notée (G_1G_2).

2) COVARIANCE ET COEFFICIENT LINEAIRE D'UNE SERIE DOUBLE :

- On appelle covariance d'une série double, le nombre noté $cov(X,Y)\ ou\ \sigma_{XY}$ tel que :

$$cov(X,Y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

Soit

$$cov(X,Y) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{N} - \bar{x}\bar{y}$$

- Le coefficient de corrélation linéaire d'une série double est le nombre réel noté r et définit par :

$$r = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_x . \sigma_y} \quad \text{Or} \quad \sigma_x = \sqrt{V(X)} \quad \text{et} \quad \sigma_y = \sqrt{V(Y)}$$

$$\text{Alors} \quad r = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

Avec

$$V(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{N} - (\bar{x})^2 \text{ et } V(Y) = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}{N} - (\bar{y})^2 .$$

REMARQUE :

Ce coefficient est compris entre -1 et $+1$ et sert à mesurer la qualité d'un ajustement linéaire.

3) AJUSTEMENT LINEAIRE PAR LA METHODE DES MOINDRES CARRÉS :

- La droite de régression de $y \ en \ x$ est donnée par la formule : $y = ax + b$ avec

$$a = \frac{cov(X,Y)}{V(x)} \text{ et } b = \bar{y} - a\bar{x}.$$

- La droite de régression de $x \ en \ y$ est donnée par la formule : $x = ax + b$ avec

$$a' = \frac{cov(X,Y)}{V(y)} \text{ et } b = \bar{x} - a'\bar{y}$$

PROPRIETÉS :

1) Le coefficient de corrélation linéaire r est du même signe que $cov(X, Y)$.
2) Les coefficients directeurs a et a'des droites de régression de $Y \ en \ X$ et de $X \ en \ Y$, sont définies par : $aa' = r^2$
3) La valeur absolue du coefficient de corrélation linéaire est : $|r| = \sqrt{aa'}$
   - Si $a > 0 \ et \ a' > 0$ alors $r = \sqrt{aa'}$; si $a < 0 \ et \ a' < 0$ alors $r = -\sqrt{aa'}$.
   - Si $r^2 = 1 \ alors \ aa' = 1$ soit $a = \frac{1}{a'}$. Alors les deux droites de régression de Y en X et de X en Y sont confondues. On dit que l'ajustement linéaire est parfait.
   - Si $0{,}87 \leq |r| \leq 1$, alors on dit qu'il y'a bonne ou forte corrélation entre les deux variables car les droites de régression de $Y \ en \ X$ et de $X \ en \ Y$ sont proches l'une de l'autre.

EXERCICE D'APPLICATION

Soit la série $(x_i; y_j)$ des notes en SVT et PHILOSOPHIE obtenues par 10 élèves :

Note en SVT (X)	10	13	8	10	13	17	5	8	16	16
Note en philo (Y)	9	12	5	6	9	14	3	6	12	14

Le nuage de points de cette série suggère un ajustement affine entre $x \ et \ y$.

1) Déterminer la droite (d) de régression de $y \ en \ x$,

2) Déterminer la droite (d') de régression de x en y

MODULE 26 (D)	ORGANISATION ET GESTION DES DONNÉES

CHAPITRE XII .

PROBABILITES

INTERET :

La théorie des probabilités constitue un cadre mathématique pour la description du hasard et de la variabilité, ainsi que pour le raisonnement en univers incertain. Elle forme un tout cohérent dont les concepts, les méthodes et les résultats interviennent dans de très nombreux domaines des sciences et des technologies, parfois de manière fondamentale.

MOTIVATION :

La vie quotidienne, comme la pratique des sciences et des techniques, abondent en situations présentant plusieurs alternatives entre lesquelles il n'est pas possible de trancher a priori avec certitude, que cette incertitude soit attribuée au hasard ou à la chance, au manque d'informations ou de moyens de prévision à la situation considérée. Ce chapitre nous donne les méthodes de résolutions de telles situations dans un langage mathématique.

LECON 1: Expériences aléatoires

DUREE : 50 minutes

Objectifs pédagogiques :

- Définir et caractériser une expérience aléatoire.
- *Donner à partir des exemples d'expériences aléatoires, tirés de la vie courante des éventualités, l'univers de toutes les possibilités, des évènements, etc.*

Pré requis

Dans une classe de 54 *élèves, les élèves pratiquent au moins le football ou le basketball.* 40 *pratiquent le football et* 30 *le basketball.*

1. Quel est le nombre d'élèves qui pratiquent à la fois les deux sports.

2. Quel le nombre d'élèves qui pratiquent uniquement le football ? Uniquement le basketball ?

Solution

Désignons par A et B respectivement l'ensemble des élèves qui pratiquent le football et le basketball.

1. Card $(A \cap B) = card(A) + card(B) - card(A \cup B) = 40 + 20 - 54 = 16$

2. Le nombre d'élèves qui pratiquent uniquement le foot est card $(A - B) = card(A) - card(A \cap B) = 40 - 16 = 24$

Le nombre d'élèves qui pratiquent uniquement le basket est card $(B - A) = card(B) - card(A \cap B) = 30 - 16 = 14$

SITUATION PROBLEME :

OLIVER lance un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 4 et note le numéro de la face supérieure. Son papa lui dit « considère les évènements suivants » : A "Le numéro obtenu est pair" et B "Le numéro obtenu est impair" et tu verras que ces évènements sont incompatibles. Aider OLIVER à comprendre ce que dit son papa.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

Une expérience consiste à lancer un dé parfaitement équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et à noter le nombre qui apparait sur la face supérieure du dé.

1. a) Peut-on dire à l'avance quel nombre va apparaitre sur la face supérieure ? Pourquoi ? Comment peut-on appeler une telle expérience ?

b) Citer 2 expériences aléatoires dans la vie courante.

2. Déterminer l'ensemble Ω des résultats possibles.

3. Considérons les évènements suivants obtenus à l'issue du jeu :

A :« obtenir un nombre premier »;

B : « obtenir un multiple de 3 » ;

C : « obtenir un nombre supérieur ou égal à 7 ».

a. Donner l'ensemble des résultats favorables pour A; B et C.

b. Les évènements A et B ont-ils un élément en commun ? que peut-on dire de ces évènements ?

c. Calculer cardA et cardB

Solution :

1.a) Non, car ça relève du hasard. Une telle expérience est dite aléatoire.

b) Nous avons :

• lancer d'une pièce de monnaie équilibrée à deux faces : Pile (P) ou face (F). L'ensemble des issues possibles constitue **l'univers associé à cette expérience aléatoire**.

• le tirage au sort à l'issu d'une promotion.

2. L'ensemble Ω des résultats possibles est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ et on l'appelle univers des possibles associé à l'expérience aléatoire.

3. a. Nous avons $A = \{2; 3; 5\}$; $B = \{3; 6\}$ et $C = \{\}$.

b.Les évènements A et B ont un élément commun.

c. cardA =3 et cardB=2

RESUME :

Définitions

- ✓ *On appelle **expérience aléatoire**, toute expérience ayant plusieurs issues et dont on ne peut pas prévoir avec certitude laquelle de ces issues sera réalisée.*
- ✓ *Un résultat obtenu à l'issue d'une expérience aléatoire est appelé **une éventualité** liée à cette expérience.*
- ✓ ***L'univers** associé à une expérience aléatoire est l'ensemble des résultats possibles formé de toutes les éventualités de l'expérience. On le note* Ω.
- ✓ *On appelle **évènement** toute partie de* Ω.Un évènement est réalisé s'il contient le résultat de l'expérience.

Exemple :

On *lance un dé et on observe le numéro de la face supérieure. Obtenir un nombre pair est l'évènement*

$A = \{2; 4; 6\}$ *donc si on lance le dé et on obtient le numéro* 2 *ou* 4 *ou* 6 *alors l'évènement A est réalisé.*

Vocabulaires

- *Un évènement B est **réalisé** si le résultat obtenu à l'issue de l'expérience est une de ses éventualités*
- ***L'évènement certain** d'une expérience aléatoire est l'univers.*
- ***L'évènement impossible** est l'évènement qui n'est jamais réalisé dans l'expérience. On le note* $\emptyset$.
- *Un **évènement élémentaire** est un évènement formé d'une unique éventualité de l'épreuve.*

bon à savoir

Soient A et B deux évènements

- *L'ensemble des éventualités qui réalisent à la fois A et B est noté* $A \cap B$.
- *L'ensemble des éventualités qui réalisent A ou B est noté* $A \cup B$.
- *Les évènements A et B sont dits **incompatibles** si* $A \cap B = \emptyset$.
- *Les évènements A et B sont dits **contraires** si A est l'ensemble des éventualités de l'univers qui ne réalisent pas B. On note* $A = \overline{B}$.

- *Deux évènements sont dits* ***indépendants*** *si la réalisation de l'un n'est pas liée ou conditionnée par celle de l'autre*

EXERCICES D'APPLICATIONS :

On lance un dé parfait et on observe le numéro de la face supérieure. L'univers associé à cette expérience est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. *On considère les évènements suivants :*

A : « obtenir un nombre pair »

B : « obtenir un nombre premier »

C : « obtenir le chiffre 6 »

Déterminer les évènements suivantes : $A; B; C, A \cap B, A \cup B, B \cap C$ *et* $\overline{A}$.

DEVOIRS : **II-Exercices ….. pages…..**

LECON 2: Probabilité d'un évènement

DUREE :100 minutes

Objectifs pédagogiques :

- Présenter la probabilité d'un évènement.
- Donner des exemples puis énumérer les propriétés.

Pré requis

Expérience aléatoire, issues, évènement…..

SITUATION PROBLEME :

Viviane pour sa troisième grossesse va rencontrer son gynécologue qui lui dit qu'il est possible qu'elle accouche d'une fille. Selon toi quelle est la chance qu'elle accouche d'une fille ?

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

Activité1

On jette une pièce équilibrée, combien avons-nous de chances d'avoir "pile" ?

Solution

On a une chance sur 2 d'avoir pile. On dit alors que la probabilité d'avoir pile est 1/2. La probabilité d'un événement est un **nombre** qui traduit la **chance** que l'évènement se réalise. Ce nombre peut s'écrire :

• **avec une fraction**, par exemple $\frac{1}{2}$

• **avec un pourcentage**, par exemple 50%

• **avec un nombre décimal**, par exemple 0; 5

Activité 2

On lance un dé parfaitement équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et on relève le nombre sur la face supérieure du dé.

1. Déterminer le nombre de résultats possibles.

Avec l'univers Ω lié à cette épreuve, on constitue une population statistique d'effectif total $card\Omega$ et on assimile un évènement A à une modalité dont l'effectif est $cardA$.

2. a) Déterminer la fréquence de réalisation de l'évènement A : " obtenir un nombre premier " Cette fréquence est la probabilité de l'évènement A. Elle est notée $P(A)$.

On considère les évènements suivants :

B : " le numéro obtenu est supérieur ou égale à 4 ",

C : " le numéro obtenu est un diviseur de 10 ".

b) Calculer $P(B)$; $P(C)$; $P(B \cap C)$; $P(B \cup C)$; $P(\bar{B})$; $P(\Omega)$ et $P(\emptyset)$.

Solution

1. Puisque le dé est parfaitement équilibré un résultat peut être soit le chiffre 1, soit 2, soit 3, soit 4, soit 5, soit 6. Nous avons au total 6 résultats possibles. L'univers $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

2. a) La fréquence de réalisation de l'évènement A est : $P(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{3}{6}$

b) Puisque les numéros supérieurs à 4 sont 4,5 et 6, alors $P(B) = \frac{\text{card}B}{\text{card}\Omega} = \frac{3}{6}$.

Les diviseurs de 10 sont 1, 2 et 5, ainsi $P(C) = \frac{\text{card}C}{\text{card}\Omega} = \frac{3}{6}$.

L'évènement $B \cap C$ est l'évènement " le numéro obtenu est supérieur à 4 et est un diviseur de 10",

Soit $B \cap C = \{5\}$, d'o`u $P(B \cap C) = \frac{1}{6}$.

L'évènement $B \cup C$ « est l'évènement " le numéro obtenu est supérieur ou égale à 4 ou est un diviseur de 10 »

$B \cup C = \{1,2,4,5,6\}$; $P(B \cup C) = \frac{5}{6}$,

$\bar{B} = \{1, 2, 3\}$; $P(\bar{B}) = \frac{3}{6}$,

$P(\Omega) = 1$ et $P(\emptyset) = 0$.

RESUME :

Définition1. Soit Ω l'univers des évènements associés à une expérience aléatoire.

On appelle **probabilité** sur Ω toute application P de l'ensemble des parties de Ω vers l'intervalle [0,1] vérifiant :

1) $P(\Omega) = 1$.

2) $P(\emptyset) = 0$.

Définition 2. On considère une expérience aléatoire dont l'univers Ω est fini. On suppose que tous les évènements élémentaires ont la même chance d'être réalisé. On dit qu'il y'a équiprobabilité et la

" probabilité de la réalisation de A " notée P(A) est donnée par : $P(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{\textbf{nombre de cas favorables}}{\textbf{nombre de cas possibles}}$

Définition 3. La probabilité d'un évènement A notée P(A), est la somme des probabilités des évènements élémentaires contenus dans A. ie si $A = \{w_1; w_2; \dots; w_r\}$ Alors $P(A) = P(w_1) + P(w_2) + \dots + P(w_n)$.

critères

On reconnait qu'il y a équiprobabilité par l'emploi des expressions telles que : **indiscernable au toucher, tirage au hasard**, **pièce parfait**, **non pipé ou non truqué**, **carte bien battus ,...**

Propriétés Soit P une probabilité définie sur l'ensemble des parties de Ω.

• Pour tout évènement A de Ω, $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

• Pour tous évènements A et B de Ω, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ et Si $A \cap B = \emptyset$, alors

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

• Pour tout évènements A et B de Ω, si $A \subseteq B$ alors $P(A) \leq P(B)$.

• Pour tous évènements A et B de Ω, A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

EXERCICES D'APPLICATIONS :

Exercice 1

Une urne contient 5 boules rouges, 2 boules blanches et 3 boules noires indiscernables au toucher. On tire simultanément et au hasard trois boules de cette urne.

1) Quel est le nombre de tirages possible ?
2) Calculer les probabilités des évènements suivants :
   A : « obtenir des boules tricolores », B : « obtenir exactement deux boules blanche et une boule noire »

C : « obtenir au moins une boule noire ».

Exercice 2

On lance un dé pipé, dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et on note le numéro obtenu sur la face supérieure. La probabilité d'apparition d'une face portant un numéro pair est le double de La probabilité d'apparition d'une face portant un numéro impair.
Les probabilités d'apparition des faces portant les numéros de même parité sont égales .Calculer la probabilité d'apparition des faces portant les numéros i ($1 \leq i \leq 6$).

DEVOIR :

I-Deux personnes tirent chacune une fois sur une cible. La première personne a la probabilité 0,9 d'atteindre la cible et la deuxième la probabilité 0,7 d'atteindre la cible.
Calculer la probabilité des évènements suivants :
A : « la cible est atteinte par une et une seule personne » ; B : « la cible est atteinte par les deux personnes »
C : « Aucune des deux personnes n'atteint la cible » ; D : « la cible est atteinte par au moins une des deux personnes »

II-Exercices 10 et 17 pages 310

LECON 3: Probabilités conditionnelles

DUREE :100 minutes

Objectifs pédagogiques :

- *Résoudre des problèmes liés aux probabilités conditionnelles*
- *Utiliser la propriété $P(A)=P(B)\ P(A/B) + P(\overline{B})P(A/\overline{B})$, B étant un événement de probabilité non nulle et différente de 1 .*

Pré requis

Notion de probabilité, d'équiprobabilité.

SITUATION PROBLEME :

Dans une région, les femmes représentent les 65% de la population adulte. Un test de dépistage d'une maladie M révèle que 30% des femmes sont atteintes de cette maladie et 15% des hommes sont malades. Vous êtes en stage dans une ONG et l'on vous demande de donner le pourcentage des individus atteint de la maladie. Présenter clairement votre démarche.

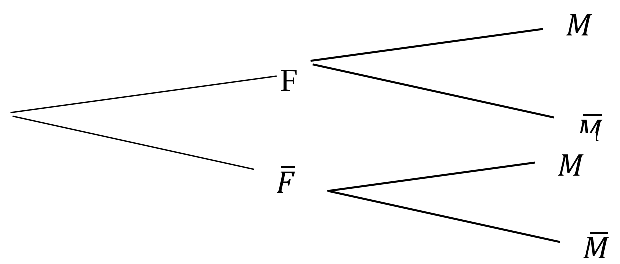
ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

Les femmes représentent les 65% de la population adulte dans une région. Un test de dépistage d'une maladie M révèle que 30% des femmes sont atteintes de cette maladie et 15% des hommes sont malades.

On choisit au hasard un individu dans cette population adulte et on note :

F : « l'individu est une femme » ; M : « l'individu est atteint de la maladie »

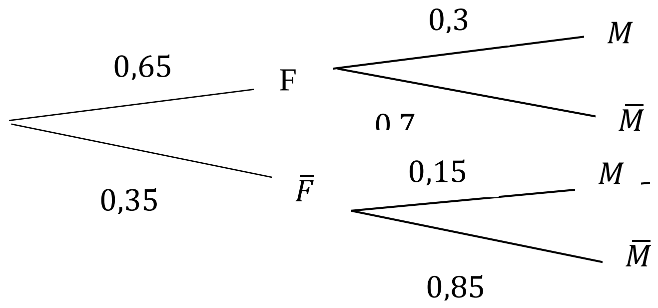
1) Compléter les branches du schéma suivant :



2) Calculer les probabilités : $P(F \cap M)$, $P(M)$.

Solution

1. Complétons les branches du schéma :



$P(F)=\frac{65}{100} = 0,65$; $P(\overline{F})=\frac{35}{100} = 0,35$

P(M/F)=$\frac{30}{100}$ = 0,3 ; P($\bar{M}$/F)== 0,7 ; P(M/$\bar{F}$)=0,15 , P($\bar{M}$/$\bar{F}$)=0,85

2. Calculons les probabilités :

$P\ (F \cap M)$=P(F)xP(M/F)=0,65x0,3 ;

L'évènement M désigne l'individu est une femme et qui soit malade ou un homme et qui soit malade :

$P(M)= P\ (F \cap M)+ P\ (\bar{F} \cap M)$= 0,65x0,3 +0,35x0,15

RESUME :

Définition. Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire et P une probabilité définie sur l'ensemble des parties de Ω. Soient B et A deux évènements tel que P(B) ≠ 0.
L'évènement noté A/B est l'ensemble des éventualités pour lesquelles A est réalisé sachant que B est déjà réalisé. On l'appelle l'évènement A conditionné par B et on lit " A sachant B ".
On appelle **probabilité conditionnelle** de A sachant que B est réalisé, le réel noté P(A/B) ou $P_B(A)$ et défini par : $P_B(A)$ = P(A/B) =$\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

Bon à savoir. Dans un arbre de choix

- ✓ **La somme des probabilités des évènements issus d'un même nœud est égale à un.**
- ✓ **La probabilité d'un évènement qui suit une branche est égale au produit des probabilités des évènements inscrits sur cette branche.** Si A et B sont tous deux de probabilité non nulle, alors les probabilités conditionnelles p(A/B) et p(B/A) sont toutes les deux définies et on a : p(A∩B) = p(A/B)×p(B) = p(B/A) × p(A)

EXERCICES D'APPLICATIONS :

Dans un magasin d'électroménager, on s'intéresse au comportement d'un acheteur potentiel d'un téléviseur et d'un magnétoscope. La probabilité qu'il achète un téléviseur est 0,6.
La probabilité pour qu'il achète un magnétoscope quand il a acheté un téléviseur est 0,4.
La probabilité pour qu'il achète un magnétoscope quand il n'a pas acheté de téléviseur est de 0,2.
On désigne par T l'évènement : « le client achète un téléviseur » et par M l'évènement : « le client achète un magnétoscope ».
1) Dresser l'arbre de choix.
2) Quelle est la probabilité pour qu'il achète un téléviseur et un magnétoscope ?
3) Quelle est la probabilité pour qu'il achète un magnétoscope ?
4) Le client achète un magnétoscope. Quelle est la probabilité qu'il achète un téléviseur ?

DEVOIR :

Exercices 1c , 2 pages 317, 332

LECON 4: Variables aléatoires
DUREE :100 minutes

Objectifs pédagogiques :

- ✓ Présenter une variable aléatoire et donner des exemples.
- ✓ Déterminer les caractéristiques d'une variable aléatoire (paramètres de position, paramètres de dispersion ; fonction de répartition) .

Pré requis

Le tableau ci-dessous donne la situation d'admissibilité des élèves d'une classe de terminale "*D*" dans un collège de la place.

	Admis	Refusés	Totaux
Filles		15	
Garçons	20	35	55
Totaux	30		80

On choisit au hasard un élève dans cette classe.
1. Compléter le tableau.
2. Calculer la probabilité des évènements suivants : *A* : « *l'élève* est admis », *G* : « *l'élève* est un garçon ».

Solution

1. Complétons le tableau.

	Admis	Refusés	Totaux
Filles	10	15	25
Garçons	20	35	55
Totaux	30	50	80

2. La probabilité des évènements suivants :

A : « *l'élève* est admis » . $P(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{30}{80}$

G : « *l'élève* est un garçon ». $P(G) = \frac{\text{card}G}{\text{card}\Omega} = \frac{55}{80}$

SITUATION PROBLEME :

TAMO se rend dans une salle de jeux et choisit le jeu de boules. La machine contient 2 boules blanches, 3 boules vertes et 5 boules rouges. Le principe du jeu consiste à tirer simultanément et au hasard 2 boules puis gagner 100F par boules blanche tirée, 25F par boule verte et perte de 50F par boule rouge. Aider TAMO à savoir si le jeu sera à son profit.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

Une urne contient 2 boules blanches, 3 boules vertes et 5 boules rouges. Un jeu consiste à tirer simultanément et au hasard 2 boules de l'urne. On gagne 100F par boules blanche tirée, 25F par boule verte et on perd 50F par boule rouge.

1. Soit *X* l'application de **Ω** dans IR qui, à chaque éventualité associe le gain (algébrique) correspondant. Quelles sont les valeurs possibles prises par X ?

2. On note [$X = xi$] pour désigner l'évènement : " obtenir un gain égal à *xi*"
Recopier et compléter le tableau suivant :

Valeurs de X : (*xi*)					
P(X= *xi*)=P_i					

3. Calculer $\sum_{i=1}^{5} x_i p_i$. A qui le jeu profite-t-il ?

Solution

1. Soit *X* l'application de Ω dans IR qui, à chaque éventualité associe le gain (algébrique) correspondant.
   Les valeurs possibles prises par X sont : -100 , -25 , 50 , 125 , 200.
2. **Calculons les probabilités**
   P(X= *-100*)= $\frac{C_5^2}{C_{10}^2} = \frac{10}{45}$; P(X= *-25*)= $\frac{C_5^1 x C_3^1}{C_{10}^2} = \frac{15}{45}$; P(X= *50*)= $\frac{C_3^2 + C_2^1 x C_5^1}{C_{10}^2} = \frac{13}{45}$; P(X= *125*)= $\frac{C_2^1 x C_3^1}{C_{10}^2} = \frac{6}{45}$;
   P(X= *200*)= $\frac{C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{45}$.

Valeurs de X : (*xi*)	-100	-25	50	125	200
P(X= *xi*)=P_i	$\frac{10}{45}$	$\frac{15}{45}$	$\frac{13}{45}$	$\frac{6}{45}$	$\frac{1}{45}$

3. Calculons $\sum_{i=1}^{5} x_i p_i = \frac{225}{45} = \mathbf{5}$. Le jeu profite au joueur.

RESUME :

Définition. *On appelle **variable aléatoire** X sur un univers Ω, toute application de Ω vers* IR.
Lorsque à chaque éventualité d'une expérience aléatoire, on associe un nombre réel x_i (valeur prise par X), on dit que l'on a défini une variable aléatoire)
L'ensemble de toutes les valeurs prises par *X* notée *X*(Ω) est appelée univers image de Ω par *X*.
L'évènement de Ω noté [$X = k$] est l'ensemble des éléments *w de* Ω tels que $X(w) = k$.
L'évènement de Ω noté [$X < k$] est l'ensemble des éléments $w \in \Omega$ tels que $X(w) < k$.
La loi de probabilité de *X* est l'application qui, à tout *xi* de *X*(Ω) associe $P([X = x_i])$.

Remarque. *Il est commode de représenter une loi de probabilité par un tableau.*

x_i	x_1	...	x_n
$P([X = x_i]) = p_i$	$P([X = x_1])$	...	$P([X = x_n])$

Il faut toujours s'assurer que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Caractéristique d'une variable aléatoire

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire et *P* une probabilité définie sur l'ensemble des parties de Ω. Soit *X* une variable aléatoire sur Ω avec $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$.

• **Espérance mathématique**

On appelle Espérance mathématique (ou moyenne) le réel noté $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

- **Variance et Ecart-type**

On appelle Variance de *X* le nombre réel noté :
$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{xi} - \boldsymbol{E(X)})^2 \boldsymbol{Pi} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{xi}^2 \boldsymbol{Pi} - (E(X))^2$
L'écart-type est le réel noté $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

- **Fonction de répartition**

Définition. Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω de probabilité p.
La fonction de répartition de X est l'application F_X de IR vers [0; 1] qui à, tout x associe $F_X(x) = p(X \leq x) = p(X \in]-\infty; x[\ )$

Lorsque X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{x_1; \cdots; x_n\}$ avec $x_1 < \cdots < x_n$ alors
pour $x \in IR$, $F_X(x) = \sum_1^k p(X = x\mathbf{i}) = \sum_1^k p_i$ avec k tel que $x_k \leq x < x_{k+1}$

EXERCICES D'APPLICATIONS :

Un sac contient 5 jetons Rouges et 2 jetons blancs tous indiscernables au toucher. Un jeu consiste à tirer au hasard un jeton du sac. Si le jeton est Rouge, le jeu s'arrête ; sinon on tire un second jeton sans remettre le premier dans le sac. La mise est de 50F. Le tirage d'un jeton blanc rapporte 200F, tandis que celui d'un jeton Rouge ne rapporte rien.

Soit X la variable aléatoire réelle qui, à chaque jeu associe le gain algébrique du joueur.

1) Quelles sont les valeurs possibles de X ?
2) Déterminer la loi de probabilité de X
3) Déterminer la fonction de répartition de X puis la représenter graphiquement.

DEVOIR : **Exercices 8 ,11 pages 333**

LECON 5: Epreuves de Bernoulli

DUREE : 100 minutes

Objectifs pédagogiques :

- Présenter le schéma de Bernoulli et donner des exemples de situations faisant intervenir le schéma de Bernoulli.
- Reconnaitre la loi binomiale et l'utiliser dans la résolution de certains problèmes.

Pré requis

1. Définir une variable aléatoire et donner des exemples.
2. Donner les caractéristiques d'une variable aléatoire.

Solution

1 . *On appelle variable aléatoire X sur un univers* **Ω**, *toute application de* **Ω** *vers* IR. (lorsque à chaque éventualité d'une expérience aléatoire , on associe un nombre réel x_i , on dit que l'on a défini une variable aléatoire)

2. Les caractéristiques d'une variable aléatoire numérique *X*.

- Espérance mathématique (ou moyenne) notée $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$
- Variance de *X* notée : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{xi} - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}))^2 \boldsymbol{Pi}$ $= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{xi}^2 \boldsymbol{Pi} - (E(X))^2$
- L'écart-type est le réel noté $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

SITUATION PROBLEME :

Ali est en stage dans une entreprise possédant 50 ordinateurs. Son chef de stage lui dit : La probabilité qu'un ordinateur tombe en panne est de 0,01 ; le fonctionnement d'un ordinateur est indépendant des autres. Détermine la moyenne des ordinateurs en panne de l'entreprise. Aide Ali.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

Une entreprise possède 50 ordinateurs. La probabilité qu'un ordinateur tombe en panne est de 0,01. On suppose que le fonctionnement d'un ordinateur est indépendant des autres.

Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre d'ordinateurs en panne.

1) Quelles sont les valeurs prises par X ?
2) On considère l'épreuve qui consiste à prendre un ordinateur au hasard parmi les 50 ordinateurs de l'entreprise et ayant les issues possibles : S « l'ordinateur est en panne » et $E = \bar{S}$: « l'ordinateur n'est pas en panne ».
   a. Trouver P(S) et P(E).
   b. Ces ordinateurs étant indépendants les uns des autres, que peut –on dire de la loi de probabilité de X ?

3) On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'ordinateurs en panne parmi les 50 disponibles.

a. Que signifie P(X=3) ? Calculer $\mathbf{C_{50}^{3} 0,01^{3}(1-0,01)^{50-3}}$

b. Calculer $P(X \leq 3)$. Interpréter ce résultat.

c. Calculer E(X) = 50 × 0,01. Interpréter ce résultat.

Solution

1) On note X la variable aléatoire correspondant au nombre d'ordinateurs en panne.

On a alors X = { 0; 1; 2; … ; 49; 50}

2) a) On a P(S) = 0,01 et P(E) = 1 - 0, 01 = 0,99.

b) Ces ordinateurs étant indépendants les uns des autres, la loi de probabilité de X suit la loi binomiale de paramètres 50 et 0,01.

3)a) P(X=3) est la probabilité que 3 ordinateurs sur les 50 soient en panne.

$\mathbf{C_{50}^{3} 0,01^{3}(1-0,01)^{50-3}}$ =19 600 × $0,01^3$ × $0,99^{47}$ ≈ 0,0122.

b) $P(X \leq 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$

$=\mathbf{C_{50}^{0} 0,01^{0}(1-0,01)^{50-0} + C_{50}^{1} 0,01^{1}(1-0,01)^{50-1} + C_{50}^{2} 0,01^{2}(1-0,01)^{50-2} + C_{50}^{3} 0,01^{3}(1-0,01)^{50-3}}$ ≈ 0,699 .

La probabilité que 3 ordinateurs au maximum soient en panne est de 0,699.

c. E(X) = 50 × 0,01=0,5. En moyenne, il y aura 0,5 ordinateurs en panne dans l'entreprise.

RESUME :

Définition 1

On appelle épreuve **de Bernoulli,** une **expérience** aléatoire à deux éventualités :

• le succès de probabilité p ;

• l'échec de probabilité q = 1 - p.

Sa loi de probabilité est appelée **loi de Bernoulli** de paramètre p.

Un **schéma de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui consiste à répéter n fois de façon indépendante une épreuve de Bernoulli dont la probabilité du succès est p.

Exemples d'épreuves de Bernoulli :

- **Le jet d'une pièce de monnaie**
- **Le sexe d'un enfant à la naissance**

Propriétés

Soit un schéma de Bernoulli à n épreuves où la probabilité du succès est p et celle de l'échec q=1-p

- **La probabilité d'obtenir exactement k succès ($0 \leq k \leq n$) à l'issue des n épreuves est**
  $\boldsymbol{p_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}$
- **La probabilité d'obtenir au moins k succès ($0 \leq k \leq n$) à l'issue des n épreuves est**
  $\boldsymbol{p = \sum_{i=k}^{n} C_n^i p^i (1-p)^{n-i}}$
- **La probabilité d'obtenir au plus k succès ($0 \leq k \leq n$) à l'issue des n épreuves est**
  $\boldsymbol{p = \sum_{i=0}^{K} C_n^i p^i (1-p)^{n-i}}$

Définition 2 : loi binomiale

Soit un schéma de Bernoulli constitué d'une suite de n épreuves. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus, alors la loi de probabilité de X est : P (X = k) = $\mathbf{C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}$.Cette loi de probabilité de X est appelée loi binomiale de paramètre n et p notée $X \rightsquigarrow B(n; p)$.

Propriétés

- **Espérance mathématique de X est E(X)=np**
- **Variance V(X)=npq avec q=1-p**
- **Ecart –type** $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

EXERCICES D'APPLICATIONS :

Une urne contient 5 boules blanches et 4 boules rouges. On tire 3 boules de cette urne.

1) Quelle est la probabilité d'avoir 3 boules de même couleurs ? 3 boules de deux couleurs ?
2) On répète ce tirage 5 fois de suite, en remettant chaque fois dans l'urne les boules tirées avant le prochain tirage.

   Quelle est la probabilité de tirer 3fois 3 boules de même couleurs ?

Solution

1) Soit Ω l'univers des possibles, A : « avoir trois boules de même couleur » ; B : « avoir trois boules des deux couleurs »

On a: card $\Omega = \mathbf{C_9^3 = 84}$, card $A = \mathbf{C_5^3 + C_4^3 = 14}$, $\boldsymbol{B = \bar{A}}$. **Donc** $P(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{\mathbf{14}}{\mathbf{84}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$ et

$P(B) = 1 - P(A) = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}}$.

2) Au cours de chaque tirage, on a que deux issues : tirer 3 boules de même couleur ou alors 3 boules de deux des deux couleurs. On réalise donc une épreuve de Bernoulli de succès l'évènement A : « avoir trois boules de même couleur » et d'échec B. Notons $p = P(A) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$ et $q = 1 - p = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}}$.

Répéter 5 fois en remettant chaque fois la boule tirée, revient à réaliser un schéma de Bernoulli. Avoir 3 fois 3 boules de même couleur revient à réaliser 3 succès au cours des 5 tirages.

La probabilité de C : « tirer 3fois 3 boules de même couleurs » est : $P(C) = C_5^3 p^3 (1-p)^2 = 10(\frac{1}{6})^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0{,}032$

DEVOIR : **Exercices 17pages 334**